(5) Pregled novijih računskih algoritama za određivanje elemenata Pareto optimalnog skupa može se naći u radu *Ho, Y. C.:* »Differential Games, Dynamic Optimization and Generalized Control Theory«, J. of Opt. Th. and Appl. (JOTA), No. 3, 1970.

(6) Čini se da bi se ova teorija mogla koristiti u formiranju teorijske baze za analizu i sintezu procesa udruživanja, kooperisanja i integracije u samoupravnim odnosima među preduzećima. Naravno to je stvar budućnosti i u tom pravcu treba još mnogo da se radi.

(7) Videti, na primer, pregledni rad *Minichreiter-Klemenčić B.:* »Dinamičko programiranje«, Ekonomska analiza, No. 3—4, 1969.

(8) XIV glava, str. 18—190, poznate knjige *Bellman, R.:* »Adaptive Control Processes«, Princeton Univ. Press, 1961. (prevedeno na ruski, Mir, 1965) posvećena je primeni dinamičkog programiranja u igrama protiv prirode.

(9) Uvod u teoriju medijalnih igara dat je u radu *Wilsh, J.,* Kelleher, G.: »Description of Median Game Theory«, Revie Belge de Statistique et de Recherche Operationnelle, Vol. 10, No. 4, 1971.

(10) Klasično delo u oblasti teorije grupnog odlučivanja i pogađanja je knjiga *Siegel, S., Fouraker, L.:* »Bargaining and Group Decision Making«, McGraw-Hill, 1961.

(11) Videti originalni rad Von Stackelberg, H.: »The Theory of the Market Economy«. Oxford University Press, Oxford, 1952.

(12) Stackelbergove ideje su pre par godina ponovo postale predmet proučavanja. U jednom od novijih radova analizirane su mnoge nove osobine Stackelbergovih strategija: Simaan M., Cruz J. B.: »On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games«, JOTA, Vol. 11, No. 5, pp. 533—555, 1973.

BIBLIOGRAFIJA

— deset odabranih knjiga —

1. Aumann, R. J., *A Surway of Cooperative Games without Side Payments,* Princeton University Press, 1967.
2. Intriligator, M. D., *Mathematical Optimization and Economic Theory,* Prentice-Hall 1971.
3. Kaufmann, A., Faure, R., Le Garff, A., *Le jeux d'entreprises,* Presses Universitaires de France, Paris, 1960. (prevedeno na ruski, Mir, 1966).
4. Luce, R. D., Raiffa, H., *Games and Decisions,* John Wiley, 1957.
5. Owen, G., *Game Theory,* Saunders Co. London, 1968. (prevedeno na ruski, Mir, 1971).
6. Shapley, L. S., Shubik, M., »Concepts and Theory of Pure Competion«, Princeton University Press, 1967.
7. Shubik, M. Ed., *Game Theory and Social Behavior,* John Wiley, 1964.
8. Ventcelj, E. S., *Elementi teorije igara,* Fizmatgiz, 1959, (na ruskom).
9. Von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, 1944.
10. Vorobjev, N. N., *Matematička teorija igara,* Znanie, Lenjingrad, 1963, (na ruskom).

JEDNO PROŠIRENJE ISBELL-MARLOWLJEVE METODE

J. R. Isbell i W. H. Marlow [1] autori su prve metode u razlomljeno linearnom ili hiperboličkom programiranju. Prošle godine M. Grunspan i M. E. Thomas [2] poopćili su tu metodu da bi riješili problem cjelobrojnog hiperboličkog programiranja. Ovdje ćemo pokazati da se originalni Ibell-Marlowljev algoritam može proširiti na pseudokonveksno razlomljeno nelinearno programiranje.

1. Isbell-Marlowljev algoritam

Isbell i Marlow razmatrali su problem maksimalizacije numeričke diferencijabilne funkcije

$$z = \frac{C'X + c_0}{D'X + d_0} \tag{1}$$

na zatvorenom i ograničenom konveksnom skupu

$$S = \{X \mid AX \leq A_0,\ X \geq 0\}, \tag{2}$$

uzimajući da je

$$D'X + d_0 > 0 \qquad \text{za svako } X \in S \tag{3}$$

Njihova zamisao bila je da se problem razlomljeno linearnog programiranja (1) — (3) svede na rješavanje niza problema linearnog programiranja. U tu svrhu oni polaze od nekog X_1 iz S da bi riješili problem

$$\max_{X \in S}[f(X) = (D'X_1 + d_0)(C'X + c_0) - (C'X_1 + c_0)(D'X + d_0)] \tag{4}$$

Budući da je X_1 moguće rješenje, $\max f(X) \geq 0$. Naime, ako je X_1 optimalno rješenje linearnog programa (4), tada je $\max f(X) = 0$ i problem (1) — (3) jest riješen. Ako X_1 nije optimalno rješenje, tada je $\max f(X) > 0$. Neka je $f(X_2) = \max f(X)$. Tada iz $f(X_2) > 0$ i pretpostavke (3) slijedi da je $z(X_2) > z(X_1)$, tj. rješenje X_2 je bolje od X_1 za problem (1) — (3). Sada se postupak iterira. U funkciju cilja problema (4) dolazi X_2 umjesto X_1 pa se novi problem riješi. Ako je X_2 optimalno rješenje tog problema, tada je X_2 optimalno rješenje također i problema (1) — (3). U protivnom slučaju, zbog ograničenosti skupa S, uvijek postoji jedno $X_3 \in S$, tako da je

$$(D'X_2 + d_0)\,(C'X_3 + c_0) - (C'X_2 + c_0)\,(D'X_3 + d_0) =$$

$$= \max\,[(D'X_2 + d_0)\,(C'X + c_0) - (C'X_2 + c_0)\,(D'X + d_0)]$$

pa je $z(X_3) > z(X_2)$ itd. Očigledno je da niz $X_1, X_2, X_3, \ldots$ konvergira prema optimalnom rješenju X^* problema razlomljeno linearnog programiranja.[1]) Isto tako evidentno je da je taj niz konačan, jer su njegovi elementi ekstremne točke skupa S.

2. Proširenje Isbell-Marlowljevog algoritma

Razmotrimo sada problem razlomljeno nelinearnog programiranja

(5) $$\min Q(X) = \frac{F(X)}{G(X)}$$

(6) $$AX \le A_0$$

(7) $$X \ge 0$$

uz pretpostavke da je skup $S = \{X \mid AX \le A_0,\ X \ge 0\}$ mogućih rješenja ograničen i neprazan i da je $G(X) \neq 0$ za svaki $X \in S$.

Poznato[2]) je da je funkcija cilja $Q(X)$ pseudokonveksna, ako je

(A)
1. $F(X)$ je konveksna, $G(X) > 0$, ili
2. $F(X)$ je konkavna, $G(X) < 0$

i

(B)
1. $G(X)$ je linearna, ili
2. $G(X)$ je konveksna, $F(X) \le 0$, ili
3. $G(X)$ je konkavna, $F(X) \ge 0$.

Pođimo sada od nekog X_1 iz S pa formulirajmo problem

(8) $$\min\,[f(X) = G(X_1)\,F(X) - F(X_1)\,G(X)]$$
$$X \in S.$$

Lako se vidi da je (8) problem konveksnog programiranja, ako funkcije $F(X)$ i $G(X)$ zadovoljavaju uvjete (A) i (B). Na primjer, ako je $F(X)$ konveksna, $G(X) > 0$ i $G(X)$ konkavna, $F(X) \ge 0$, funkcija $f(X)$ jest suma konveksnih funkcija $G(X_1)\,F(X)$ i $-F(X_1)\,G(X)$, dakle i sama je konveksna.

Budući da je X_1 moguće rješenje, $\min f(X) \le 0$. Ako je X_2 optimalno rješenje problema (8), tada iz $f(X_2) \le 0$ i pretpostavke o nazivniku, tj. o $G(X)$, slijedi da je $Q(X_2) \le Q(X_1)$. Naime,

$$\frac{f(X_2)}{G(X_1)\,G(X_2)} = Q(X_2) - Q(X_1).$$

No, budući da je $G(X_1)\,G(X_2) > 0$, iz $f(X_2) \le 0$ slijedi da je $Q(X_2) - Q(X_1) \le 0$.

Prema tome, problem pseudokonveksnog programiranja (5) — (7) svodi se na rješavanje niza problema konveksnog programiranja (8).

Primjer:

$$\min Q(x_1, x_2) = \frac{-2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$-3x_1 - 4x_2 \le -12$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

J. Kaška i M. Pišek [5] sveli su taj problem na kvadratni parametarski program i riješili ga njihovom originalnom metodom. Isti taj problem riješio sam Frank-Wolfeovim algoritmom (Vidite: Lj. Martić [4], str. 61—65). Sada ćemo na nj primijeniti Isbell-Marlowljevu proceduru.

Polazimo od ekstremne točke $X_1 = (4,0)$ skupa mogućih rješenja prikazanog na slici. Tada je

$$F(X_1) = 8,\quad G(X_1) = 4,\quad Q(X_1) = 2.$$

$$\min\,[4(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2) - 8\,(x_1 + x_2)] =$$

$$= 4 \min\,(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2)$$

Sada treba riješiti ovaj problem:

$$\min\,(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2)$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$-3x_1 - 4x_2 \le -12$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

Radi se o problemu konveksnog kvadratnog programiranja kojega možemo riješiti po Wolfeovom, Dantzig- van de Panneovom ili nekom drugom algoritmu. No, budući da taj problem sa dvije varijable ima zgodnu geo-

[1]) Interesantno je da je X_2 moguće rješenje za problem (1) — (3) čak i onda kad X_1 nije moguće rješenje za taj problem. Doduše, tada može biti $z(X_2) \le z(X_1)$. No, to nema nikakve posljedice, jer X_1 nije moguće rješenje. Kad već jednom imamo moguće rješenje X_2, formulira se drugi linearni program čije optimalno rješenje za problem (1) — (3) jest bar toliko dobro kao X_2.

[2]) Vidite O. L. Mangasarian [3] i Lj. Martić [4], str. 59.

metrijsku interpretaciju, riješit ćemo ga geometrijskom metodom. Naime, funkcija cilja — označimo je sa z — može se napisati ovako:

$$(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 = 8+z$$

što je jednadžba kružnice sa centrom u točki (2,2) i radijusom $\sqrt{8+z}$, naravno, ako je $8+z \geq 0$. Treba naći kružnicu minimalnog radijusa. Budući da je njezin centar u skupu S, tražena kružnica je radijusa *0*, dakle točka (2,2). U toj točki jest $z_{\min} = -8$.

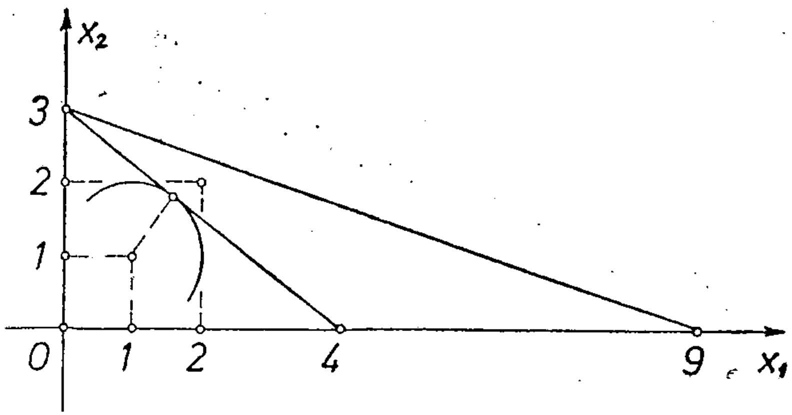
Sada imamo $X_2 = (2,2)$, $F(X_2) = 0$, $G(X_2) = 4$ i $Q(X_2) = 0$.

$$\min 4\left(x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2\right) =$$

$$= 4\min\left(x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2\right) =$$

$$= \min 4F(X).$$

Prema tome, treba naći minimum konveksne kvadratne funkcije $z = F(X)$ uz ista linearna ograničenja. Minimum pseudokonveksne razlomljene funkcije sveden je u ovome koraku na minimum njezinog brojnika.



Funkcija cilja z može se sada napisati ovako:

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 = 2+z.$$

Radi se opet o kružnici. Njezin centar (1,1) je, međutim, izvan skupa *S*. Kružnica minimalnog radijusa $\sqrt{2+z}$ prikazana je na slici. Pravac

$3x_1 + 4x_2 = 12$ tangira tu kružnicu. Prema tome, tangenta ima koeficijent smjera $-\frac{3}{4}$ pa imamo

$$2(x_1-1)+2(x_2-1)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{3}{4}$$

i zajedno

$$x_2 - 1 = \frac{4}{3}(x_1-1).$$

Ta jednadžba sa jednadžbom kružnice i jednadžbom pravca — tangente jednoznačno određuje optimalno rješenje:

$$x_1^* = \frac{8}{5},\ x_2^* = \frac{9}{5} \text{ i } z^* = -1.$$

Sada je $X_3 = \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$, $F(X_3) = -1$, $G(X_3) = \frac{17}{5}$ i $Q(X_3) = -\frac{5}{17}$.

$$\min\left[\frac{17}{5}(x_1^2+x_2^2-2x_1-2x_2)+(x_1+x_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\min(17x_1^2+17x_2^2-29x_1-29x_2)$$

Izraz u okruglim zagradama z napisat ćemo ovako:

$$17\left(x_1-\frac{29}{34}\right)^2+17\left(x_2-\frac{29}{34}\right)^2 = 2\left(\frac{29}{34}\right)^2+z.$$

Budući da je centar te kružnice $\left(\frac{29}{34}, \frac{29}{34}\right)$ izvan skupa *S*, ponavlja se postupak iz prethodnog koraka. Točka u kojoj z ima minimalnu vrijednost dobije se iz ovog sistema jednadžbi:

$$x_2-\frac{29}{34} = \frac{4}{3}\left(x_1-\frac{29}{34}\right)$$

$$3x_1+4x_2 = 12.$$

To je točka $X_4 = \left(\frac{134}{85}, \frac{309}{170}\right)$ ili (1,576; 1,818), a u njoj je $F(X_4) = -\frac{1155}{1156}$, $G(X_4) = \frac{577}{170}$ i $Q(X_4) \approx -0{,}294$. Iz referencija [4] i [5] vidi se da je X_4 optimalno rješenje također i razmatranog problema pseudokonveksnog programiranja.

Fakultet ekonomskih nauka,
Zagreb

Ljubomir MARTIĆ

LITERATURA

1. J. R. Isbell and W. H. Marlow, Attrition Games, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3, 1956, No. 1, 71—93.
2. M. Grunspan and M. E. Thomas, Hyperbolic Integer Programming, *Naval Research Logistics Quarterly;* Vol. 20, 1973, No. 2,341—356.
3. O. L. Mangasarian, Nonlinear Fractional Programming, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 12, 1969, No. 1, 1—10.
4. Lj. Martić, *Nelinearno programiranje. Odabrana poglavlja*, Zagreb, 1973.
5. J. Kaška i M. Píšek, Kvadraticko-lineárni lomené programování, *Ekonomicko-matematicky obzor*, R.2, 1966, č.2, 169—173.

A GENERALIZATION OF THE ISBELL-MARLOW'S METHOD

by

Ljubomir MARTIĆ

Summary

J.R. Isbell and W.H.Marlow [1] are the authors of the first method in linear fractional or hyperbolic programming. M. Grunspan and M. E. Thomas [2] have recently generalized this method in order to solve the problem of hyperbolic integer programming. We have shown in this paper that the original Isbell-Marlow's algorithm can be extended to pseudo-convex fractional nonlinear programming.

The first part of the paper deals with the manner in which the Isbell-Marlow's algorithm is applied to the problem of maximization of numerical differentiable function (1) on set (2) under the assumption that S is bounded and that relation (3) is satisfied.

In the second part of the paper the problem of nonlinear fractional programming (5) — (7) is taken into consideration, whereat S is assumed as being bounded and non-empty set and G(X) ≠ O for each X ε S. O. L. Mangasarian [3] has proved that the objective function Q(X) is pseudo-convex if requirements (A) and (B) are fulfilled. We have reduced the problem of pseudo-convex programming (5) — (7) to a series of convex programming problems (8). In order to illustrate this procedure we have taken the example of J. Kaška and M. Píšek's paper [5]. We have reduced their problem to a series of problems of convex quadratic programming, and have solved the latter ones by a geometric method (see Fig. 1).

INTERPRETACIJA SEKTORSKOG MULTIPLIKATORA I REDUKCIJA STRUKTURE CIJENA NA DODANU VRIJEDNOST I UVOZNI SADRŽAJ

1. Redukcija polazne strukture cijena i rezultirajuća interpretacija sektorskih multiplikatora

Strukturu cijene proizvoda svakog proizvodnog sektora sačinjavaju utrošci predmeta rada (intermedijarnih proizvoda) domaćeg i eventualno uvoznog porijekla te dodana vrijednost sastavljena od amortizacije kao prenesenog dijela vrijednosti sredstava rada i novostvorene vrijednosti. Poznato je da se pomoću međusektorskog modela narodne privrede ova polazna struktura cijene može reducirati na uvozni sadržaj (direktni i indirektni utrošak uvoznih intermedijarnih proizvoda) i dodanu vrijednost.[1]) To se postiže tako da se domaći intermedijarni proizvodi utrošeni u svakom pojedinom sektoru totalno dekomponiraju na dodanu vrijednost i uvozni sadržaj.

Napišimo u tu svrhu strukture cijena svih sektora u obliku matrice strukture cijena S

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \\ \hline m_1 & m_2 \ldots\ldots\ldots m_n \\ d_1 & d_2 \ldots\ldots\ldots d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ m \\ d \end{bmatrix} \qquad (1)$$

gdje je

a_{ij} domaća komponenta tehničkog koeficijenta (utrošak domaćih proizvoda sektora i po jedinici proizvodnje sektora j)

A domaća komponenta matrice tehničkih koeficijenata

m_j utrošak uvoznih intermedijarnih proizvoda po jedinici proizvodnje sektora j (direktni uvozni koeficijent sektora j)

$m = (m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots, m_n)$

d_j dodana vrijednost po jedinici proizvodnje sektora j (direktni koeficijent dodane vrijednosti sektora j)

$d = (d_1, d_2, \ldots\ldots\ldots, d_n)$

Suma svakog stupca matrice strukture cijena po definiciji je jednaka je-

[1]) Vidi M. Sekulić: »Primjena strukturnih modela u planiranju privrednog razvoja«, Narodne novine, Zagreb, 1968, str. 101—107.