OPTIMALAN NEHOMOGENI TOK U MREŽI

1. Uvod i notacije

U okviru matematičkog programiranja razvijeno je specifično područje poznato pod imenom — teorija mreža. Teorija mreža u ovom smislu iznikla je i razvija se na klasi problema matematičkog programiranja tzv. mrežne strukture. Realne mreže (saobraćajne, informacione, električne i sl.) obuhvaćaju se na taj način zajedničkim matematičkim modelom.

U ovom prilogu tretira se problem optimalnog nehomogenog toka u mreži. Uvodno, promatrat ćemo slijedeći realistični transportni problem:

Dano je n centara proizvodnje i potrošnje q različitih vrsta proizvoda. U centru x_i proizvodi se a_i^k a potražuje b_i^k jedinica k-te vrste proizvoda. Kapacitet rute od centra x_i do centra x_j neka je c_{ij}. Svaka vrsta proizvoda različito se ponaša u procesu transporta, što u krajnjoj liniji rezultira različitim troškovima transporta na danim rutama. U najopćenitijem slučaju smatra se da su funkcije troškova nelinearne funkcije prevezenog tereta. Treba sastaviti takav plan transporta koji će se realizirati minimalnim ukupnim transportnim troškovima. To je zapravo konkretizacija problema optimalnog nehomogenog toka u mreži, nehomogeni tok predstavlja transportni tok nehomogene (u pogledu transporta) robe.

U narednoj točki bit će formuliran opći matematički model za taj problem. Neka je sada (X, U) mreža u smislu teorije grafova [3] $\cdot X = x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ je skup vrhova a $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ je skup lukova. Svakom luku $(x_i, x_j) \varepsilon U$ pridružen je kapacitet c_{ij} a svakom vrhu intenzivnost d_i.

Vektor $\varphi = [\varphi_{ij}]$ čije komponente $\varphi_{ij} \varepsilon R$ (R je skup realnih brojeva) zadovoljavaju uvjete:

$$\sum_{x_j \varepsilon X_i^+} \varphi_{ij} - \sum_{x_j \varepsilon X_i^-} \varphi_{ij} = d_i, \quad x_i \varepsilon x$$

$$0 \leqslant \varphi_{ij} \leqslant c_{ij}, \quad (x_{ij}\, x_j) \varepsilon U$$

$$X_i^+ = \{x_j;\ (x_i, x_j) \varepsilon U\}$$

$$X_i^- = \{x_j;\ (x_j, x_i) \varepsilon U\}$$

zvat ćemo konfiguracijom homogenog toka u mreži. Komponenta φ_{ij} zove se tok u luku $(x_i, x_j) \in U$. Neka su uz realizaciju toka φ_{ij} na luku (x_i, x_j) vezani »troškovi« $t_{ij}(\varphi_{ij})$. Konfiguraciju homogenog toka koja minimalizira funkcional

$$z = \sum_{(x_i, x_j) \in U} t_{ij}(\varphi_{ij})$$

zvat ćemo optimalnom[1]). Problem maksimalnog homogenog toka u transportnoj mreži riješili su Ford i Fulkerson [3] a rješenje problema optimalnog homogenog toka uz nenegativne i konveksne funkcije troškova $t_{ij}(\varphi_{ij})$ dao je Hu [5].

2. Nehomogeni tok u mreži

Pojam konfiguracije homogenog toka u mreži može se poopćiti na slijedeći način: svakom vrhu x_i mreže (X, U) pridružimo vektor intenzivnosti $d_i = (d_i^1, d_i^2, \ldots, d_i^k, \ldots, d_i^q)$ a svakom luku (x_i, x_j) kao i ranije kapacitet c_{ij}. Komponentu d_i^k zvat ćemo intenzivnošću k-te vrste vrha x_i.

Vektorsku funkciju $\varphi = [\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^\kappa, \ldots \varphi^q]$ koja zadovoljava uvjete:

$$\sum_{x_j \in X_i^+} \varphi_{ij}^k - \sum_{x_j \in X_i^-} \varphi_{ji}^k = d_i^k, \quad x_i \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

$$\sum_{h=1}^{q} \varphi_{ij}^k \leqslant c_{ij} \quad ; \quad (x_i, x_j) \in U$$

$$\varphi_{ij}^k \geqslant 0 \quad ; \quad (x_i, x_j) \in U, \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

zvat ćemo konfiguracijom nehomogenog toka u mreži (X, U). Pri tom je $\varphi_{ij} = (\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2, \ldots, \varphi_{ij}^k, \ldots, \varphi_{ij}^q)$ nehomogeni tok u luku (x_i, x_j). Nužni i dovoljni uvjeti egzistencije konfiguracije homogenog toka u mreži poznati su [3], međutim ti uvjeti za slučaj nehomogenog toka nisu još dovoljno istraženi [7]. Ne ulazeći sada u problem egzistencije nehomogenog toka pretpostavit ćemo da mreža dozvoljava realizaciju nehomogenog toka. Neka su uz realizaciju nehomogenog toka φ_{ij} na luku (x_i, x_j) vezani »troškovi« $t_{ij}(\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2, \ldots \varphi_{ij}^k, \ldots, \varphi_{ij}^q) = t_{ij}(\varphi_{ij})$.

Nehomogeni tok koji minimalizira funkciju

$$z = \sum_{(x_i, x_j) \in U} t_{ij}(\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2, \ldots, \varphi_{ij}^k, \ldots, \varphi_{ij}^q)$$

zvat ćemo optimalnim. Problemu maksimalnog homogenog toka ovdje korespondira problem maksimalnog nehomogenog toka [6].

---

1) Klasični problem transporta može se shvatiti kao problem optimalnog homogenog toka u tzv. dvodjelnoj mreži [3].

3. Nelinearan problem optimalnog nehomogenog toka

Bez daljnjih ograničenja na funkcije »troškova« t_{ij} (φ_{ij}) ne mogu se dati zadovoljavajući uvjeti optimalnosti. U tu svrhu pretpostavimo da su funkcije t_{ij} (φ_{ij}) konveksne (konkavne) i diferencijabilne. U većini praktičnih problema ta je pretpostavka ispunjena.

Promatra se dakle problem:

$$\min \sum_{(x_i,\, x_j)\, \varepsilon\, U} t_{ij}\,(\varphi_{ij})$$

$$(1) \qquad \sum_{x_j \varepsilon X_i^+} \varphi_{ij}^{\,k} - \sum_{x_j \varepsilon X_i^-} \varphi_{ji}^{\,k} = d_i^k \,, \qquad x_i \,\varepsilon\, X, \qquad k = 1, \ldots, q$$

$$\sum_k \varphi_{ij}^{\,k} \leqslant c_{ij} \,, \qquad (x_i,\, x_j)\,\varepsilon\, U$$

$$\varphi_{ij}^{\,k} \geqslant 0 \qquad (x_i, x_j)\,\varepsilon\, U\,, \quad k = 1, \ldots, q$$

gdje su t_{ij} (φ_{ij}) konveksne funkcije. Tom problemu ekvivalentan je slijedeći:

$$\max \sum_{(x_i,\, x_j)\, \varepsilon\, U} - t_{ij}\,(\varphi_{ij})$$

$$(2) \qquad \sum_{x_j \varepsilon X_i^+} \varphi_{ij}^{\,k} - \sum_{x_j \varepsilon X_i^-} \varphi_{ij}^{\,k} = d_i^k \,, \qquad x_i \,\varepsilon\, X\,, k = 1, \ldots, q$$

$$\sum_k \varphi_{ij}^{\,k} \leqslant c_{ij} \qquad (x_i,\, x_j)\,\varepsilon\, U$$

$$\varphi_{ij}^{\,k} \geqslant 0 \,, \qquad (x_i,\, x_j)\,\varepsilon\, U\,, \quad k = 1, \ldots, q$$

gdje je funkcija cilja konkavna funkcija.

Lagranžova funkcija L pridružena tom problemu ima oblik:

$$L\,(\varphi, \lambda, \varepsilon) = \sum_{(x_{ij}\, x_j)\,\varepsilon\, U} - t_{ij}\,(\varphi_{ij}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \lambda_i^k \left(d_i^k - \sum \varphi_{ij}^{\,k} + \sum \varphi_{ji}^{\,k} \right) +$$

$$+ \sum_{(x_{ij}\, x_j)\,\varepsilon\, U} \varepsilon_{ij} \left(c_{ij} - \sum_{k=1}^{q} \varphi_{ij}^{\,k} \right) = \sum_i \sum_j \left[- t_{ij}\,(\varphi_{ij}) + \sum_{k=1}^{q} \left(- \lambda_i^k + \lambda_j^k - \varepsilon_{ij} \right) \varphi_{ij}^{\,k} \right] +$$

$$+ \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\, c_{ij} + \sum_i \sum_j \lambda_i^k\, d_i^k$$

Pri tom je $[\lambda, \varepsilon]$ vektor Lagranžovih multiplikatora, λ je $(n + q)$ — komponentti, a ε je m-komponentni vektor.

Primjene li se na problem (2) Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti [4]:

(3) $\nabla_\varphi L(\varphi^*, \lambda^*, \varepsilon^*) \leqslant 0$

(4) $\langle \nabla_\varphi L(\varphi^*, \lambda^*, \varepsilon^*), \varphi^* \rangle = 0$

(5) $\langle \nabla_{[\lambda, \varepsilon]} L(\varphi^*, \lambda^*, \varepsilon^*), [\lambda^*, \varepsilon^*] \rangle = 0$

gde je $\nabla_\varphi L$ — gradijent Lagranžove funkcije s obzirom na vektor φ, φ^* — optimalan nehomogeni tok, λ^* i ε^* — vektori Lagranžovih multiplikatora što korespondiraju optimalnom nehomogenom toku φ^*, $\langle\ ,\ \rangle$ — oznaka za skalarni produkt, tada izlazi:

Teorem:

Nehomogeni tok φ^* optimalan je ako i samo ako za svaki vrh $x_j \in X$ i svaki luk $(x_i, x_j) \in U$ egzistiraju vektor[2]) $\lambda_i^* = [\lambda_i^1, \lambda_i^{2*}, \ldots, \lambda_i^{q*}]^t$ (nekad se zove vektor potencijala) i realan broj $\varepsilon_{ij} \geqslant 0$, takvi da za $\sum_{i=1}^{q} \varphi_{ij}{}^{k*} < c_{ij}$

vrijedi:

$$\text{(6)} \qquad \lambda_j^{k*} - \lambda_i^{k*} \leqslant \frac{\partial t_{ij}(\varphi_{ij}^*)}{\partial \varphi_{ij}^k} \quad ; \quad \varphi_{ij}^{k*} = 0$$

$$\lambda_j^{k*} - \lambda_i^{k*} = \frac{\partial t_{ij}(\varphi_{ij}^*)}{\partial \varphi_{ij}^k} \quad ; \quad \varphi_{ij}^{k*} > 0$$

a za $\sum_{k=1}^{q} \varphi_{ij}^{k*} = c_{ij}$ ispunjeno je:

$$\text{(7)} \qquad \lambda_j^{k*} - \lambda_i^{k*} - \varepsilon_{ij}^* \leqslant \frac{\partial t_{ij}(\varphi_{ij}^*)}{\partial \varphi_{ij}^k} \quad ; \quad \varphi_{ij}^{k*} = 0$$

$$\lambda_j^{k*} - \lambda_i^{k*} - \varepsilon_{ij}^* = \frac{\partial t_{ij}(\varphi_{ij}^*)}{\partial \varphi_{ij}^k} \quad ; \quad \varphi_{ij}^{k*} > 0$$

Ti uvjeti optimalnosti su eksplicite ispisani Kuhn-Tuckerovi uvjeti optimalnosti problema maksimuma konkavne funkcije cilja uz linearna ograničenja, što je upravo slučaj u problemu optimalnog nehomogenog toka. Na osnovu tih uvjeta efektivnom konstrukcijom vektora λ_i^* i veličina ε_{ij}^* može se doći do optimalnog nehomogenog toka — algoritam potencijala [2].

4. Linearan problem optimalnog nehomogenog toka

To je problem tipa (1) uz olakšavajuću okolnost da su funkcije $t_{ij}(\varphi_{ij})$ linearne. Promatrajmo dakle problem:

---

[2]) t — oznaka za transponiranje.

$$\min \sum_{k=1}^{q} \langle t^k, \varphi^k \rangle$$

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{q} I\,\varphi^k \leqslant c$$

$$A\varphi^k = d^k, \qquad k = 1, \ldots, q$$

$$\varphi^k \geqslant 0, \qquad k = 1, \ldots, q$$

Ovdje je A — matrica incidencije mreže (X, U), $\varphi^k = [\varphi_{1_{j_1}}^{k}, \ldots \varphi_{n_{j_n}}^{k}]^t$ vektor k-ti tok, $c = [c_{1_{j_1}}, \ldots, c_{n_{j_n}}]^t$ — vektor kapaciteta, $t^k = [t_{1_{j_1}}^{k}, \ldots, t_{n_{j_n}}^{k}]^t$ — vektor troškova, $d^k = [d_1^k, \ldots, d_n^k]^t$ — vektor intenzivnosti a I — jedinična matrica m-tog reda. Vektori φ^k, c i t^k su m-komponentni a d^k je n-komponentni vektor. Nakon uvođenja vektora ε dopunskih varijabli u problemu (8) dobiva se:

$$\min \sum_{k=1}^{q} \langle t^k, \varphi^k \rangle$$

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{q} I\,\varphi^k + I\,\varepsilon = c$$

$$A\varphi^k = d^k \quad ; \qquad k - 1, \ldots, q$$

$$\varphi^k \geqslant 0 \quad ; \qquad k - 1, \ldots, q$$

To je problem linearnog programiranja s velikim brojem nepoznanica [ima $(mq + m)$ nepoznanica i $(m + nq)$ jednadžbi] pa je zbog specifične strukture matrice ograničenja (blok matrica) korisno primjeniti Dantzig-Wolfeov princip dekompozicije [8]. Ako je $\Phi^k = \{\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{N_k}^k\}$ skup ekstremnih točaka skupa rješenja sistema $A\varphi^k = d^k$ onda problem (9) prelazi u problem

$$\min \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^k \langle t^k, \varphi_j^k \rangle \right.$$

$$(10) \qquad \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^k \,(I\,\varphi_j^k) \right) + I\,\varepsilon = c$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^k = 1 \quad ; \quad k = 1, \ldots, q$$

$$\alpha_j^k \geqslant 0 \quad ; \quad j = 1, \ldots, N \quad ; \quad k = 1, \ldots\ q$$

Ovdje ima $(m + q)$ ograničenja i $(N_1 + \ldots + Nq)$ varijabli (varijable su α_j^k).

Pretpostavimo da je poznato jedno moguće bazično rješenje problema (10). Vektor simpleks multiplikatora što odgovara tom rješenju za prvih m-ograničenja neka je $\psi = [\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m]^t$ a za ostalih q-ograničenja neka je $\eta = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q]^t$.

Prema kriteriju simpleks metode vektor A_j^k konkurira za ulaz u bazu ako je zadovoljen uvjet:

$$\Delta_j^k = \langle t^k, \varphi_j^k \rangle - \langle \psi, I \varphi_j^k \rangle - \eta_k < 0$$

Budući da je φ_j^k ekstremna točka za skup rješenja sistema $A\varphi^k = d^k$ izlazi da se najbolji vektor vezan uz k-ti tok dobije rješenjem potproblema:

$$\min \ \langle t^k - \psi \, , \, \psi^k \rangle$$

$$A\varphi^k = d^k$$

$$\varphi^k \geqslant 0$$

što je zapravo problem optimalnog homogenog toka u nekapacitiranoj mreži. Prema tome prilikom određivanja vektora koji treba ući u bazu potrebno je rješiti q — potproblema optimalnog homogenog toka i izračunati pripadne vrijednosti Δ_j^k. Vektor A_j^k za koji je diferencija Δ_j^k minimalna kvalificira se za ulaz u novu bazu. Kad su svi $\Delta_j^k \geqslant 0$ rješenje je optimalno i dobiva se kao linearna konveksna kombinacija rješenja potproblema.

Kao inicijalna baza mogu se koristiti vektori uz dopunske i artificijelne varijable koje se uvode u posljednjih q — ograničenja problema 10.

Dakako, uvjeti optimalnosti tipa (6) i (7) uvažavajući pretpostavku linearnosti funkcija troškova $t_{ij}(\varphi_{ij})$ reduciraju se na jednostavnije uvjete.

Vratimo se sada ishodnom transportnom problemu skiciranom u točki 1.

5. Numerički primjer

Treba sačiniti optimalan plan transporta nehomogene robe koja se sastoji od robe R_1 i R_2 na mreži prikazanoj na sl. 1.

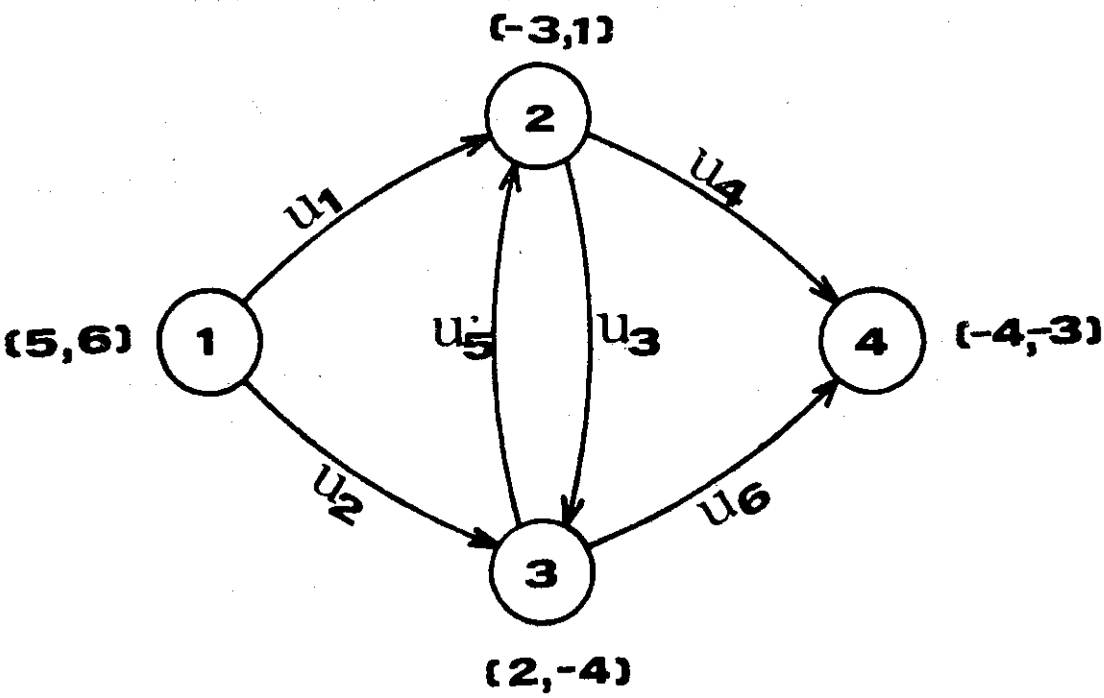
Vektori proizvodnje i potražnje jesu:

$$a^1 = [5, 4, 3, 0]^t, \qquad a^2 = [6, 3, 3, 2]^t$$

$$b^1 = [0, 7, 1, 4]^t \qquad b^2 = [0, 2, 7, 5]^t$$

Vektori intenzivnosti $d^k = a^k - b^k$, $(k = 1, 2)$ su dakle:

$$d^1 = [5, -3, 2, -4]^t, \qquad d^2 = [6, 1, -4, -3]^t$$



Sl. 1. — mreža

Nadalje, vektori troškova su:

$$t^1 = [1, 2, 3, 1, 4, 3]^t, \qquad t^2 = [2, 4, 5, 2, 1, 2]^t$$

i vektor kapaciteta $c = [10, 11, 6, 8, 9, 3]^t$

Matrica incidencije mreže jest:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a vektor k-ti tok $\varphi^k = [\varphi_{12}^k, \varphi_{13}^k, \varphi_{23}^k, \varphi_{24}^k, \varphi_{32}^k, \varphi_{34}^k]^t$; $k = 1,2$.

Treba dakle riješiti problem:

$$\min \sum_{k=1}^{q} \langle t^k , \varphi^k \rangle$$

$$\sum_{k=1}^{q} I\, \varphi^k \leqslant c \qquad ; k = 1,2$$

$$A\,\varphi^k = d^k \qquad ; k = 1,2$$

$$\varphi^k \geqslant 0 \qquad ; k = 1,2$$

uvažavajući prethodnu konkretizaciju. Riješimo ga metodom dekompozicije.

Inicijalna baza jest jedinična matrica 8-mog reda. Funkcija cilja eksplicite ispisana ima oblik

$$z = \alpha_1^1 \langle t^1, \varphi_1^1 \rangle + \alpha_2^1 \langle t^1, \varphi_2^1 \rangle + \ldots + \alpha_{N_1}^1 \langle t^1, \varphi_{N_1}^1 \rangle + \alpha_1^2 \langle t^2, \varphi_1^2 \rangle +$$

$$+ \alpha_2^2 \langle t^2, \varphi_2^2 \rangle + \ldots + \alpha_{N_2}^2 < t^2, \varphi_{N_2} \rangle + 0.\, \varepsilon_1 + \ldots + 0.\, \varepsilon_6 + M \xi_1 + M \xi_2$$

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6$ su dopunske a ξ_1 i ξ_2 artificijelne varijable, dok je M dovoljno veliki pozitivni broj.

Vektor $[\varphi, \eta] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, M, M]^t$ simpleks multiplikatora odgovara početnom rješenju. Označićemo s (PP_1) prvi a s (PP_2) drugi potproblem što ga treba riješiti da bi se u svakoj iteraciji odredio vektor koji ulazi u novu bazu. Prema točki 4. slijedi:

1 — iteracija

(PP_1) $\min \langle t^1 - \psi, \varphi^1 \rangle$

$$A \varphi^1 = d^1$$

$$\varphi^1 \geqslant 0$$

rješenje:

$\varphi_1^1 = [5, 0, 0, 2, 0, 2]^t$

$\Delta^1 = 13 - M < 0$

(PP_2) $\min \langle t^2 - \psi, \varphi^2 \rangle$

$$A \varphi^2 = d^2$$

$$\varphi^2 \geqslant 0$$

rješenje:

$\varphi_1^2 = [0, 6, 0, 1, 0, 2]^t$

$\Delta^2 = 30 - M < 0$

$$\Delta^1 < \Delta^2$$

U bazu prema tome ulazi stupac A_1^1 pa ga generiramo da bi odredili stožerni element. Bazične varijable sada su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6, \alpha_1^1$ i ξ_2. Novi vektor simpleks multiplikatora jest $[\psi, \eta] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 13, M]^t$ i odgovarajući potproblemi naredne iteracije:

2 — iteracija

(PP_1) $\min \langle t^1 - \psi, \varphi^1 \rangle$

$$A \varphi^1 = d^1$$

$$\varphi^1 \geqslant 0$$

rješenje:

$\varphi_2^1 = [5, 0, 0, 2, 0, 2]^t$

$\Delta^1 = 13 - 13 = 0$

(PP_2) $\min \langle t^2 - \psi, \varphi^2 \rangle$

$$A \varphi^2 = d^2$$

$$\varphi^2 \geqslant 0$$

rješenje:

$\varphi_2^2 = [0, 6, 0, 1, 2, 0, 2]^t$

$\Delta^2 = 30 - M < 0$

$$\Delta^2 < \Delta^1 = 0$$

U bazu ulazi vektor A_2^2. Novi vektor simpleks multiplikatora jest:

$$[\psi, \eta] = [0, 0, 0, 0, 0, 15 - \frac{M}{2} - 27 + M, M]^t$$

3 — iteracija

(PP$_1$) $\min \langle t^1 - \psi, \varphi^1 \rangle$

$$A\varphi^1 = d^1$$

$$\varphi^1 \geqslant 0$$

rješenje:

$$\varphi_3^1 = [5, 0, 0, 4, 2, 0]^t$$

$$\Delta^1 = 37 - M < 0$$

(PP$_2$) $\min \langle t^2 - \psi, \varphi^2 \rangle$

$$A\varphi^2 = d^2$$

$$\varphi^2 \geqslant 0$$

rješenje:

$$\varphi_3^2 = [0, 6, 0, 3, 2, 0]^t$$

$$\Delta^2 = 32 - M < 0$$

$$\Delta^2 < \Delta^1$$

Novi vektor simpleks multiplikatora ima komponente:

$$[\psi, \eta] = [0, 0, 0, 0, 0, -1, 15, 32]^t$$

kojima su definirani potproblemi naredne iteracije.

4 — iteracija

(PP$_1$) $\min \langle t^1 - \psi, \varphi^1 \rangle$

$$A\varphi^1 = d^1$$

$$\varphi^1 \geqslant 0$$

rješenje:

$$\varphi_4^1 = [5, 0, 0, 2, 0, 2]^t$$

$$\Delta^1 = 0$$

(PP$_2$) $\min \langle t^2 - \psi, \varphi^2 \rangle$

$$A\varphi^2 = d^2$$

$$\varphi^2 \geqslant 0$$

rješenje:

$$\varphi_4^2 = [0, 6, 0, 1, 0, 2]^t$$

$$\Delta^2 = 0$$

Budući da je $\Delta^1 = \Delta^2 = 0$ postupak se završava. Optimalno rješenje problema (10) jest:

$$\varepsilon_1 = 5 \qquad \varepsilon_5 = 8$$

$$\varepsilon_2 = 5 \qquad \alpha_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_3 = 6 \qquad \alpha_1^1 = 1$$

$$\varepsilon_4 = 4 \qquad \alpha_3^2 = \frac{1}{2}$$

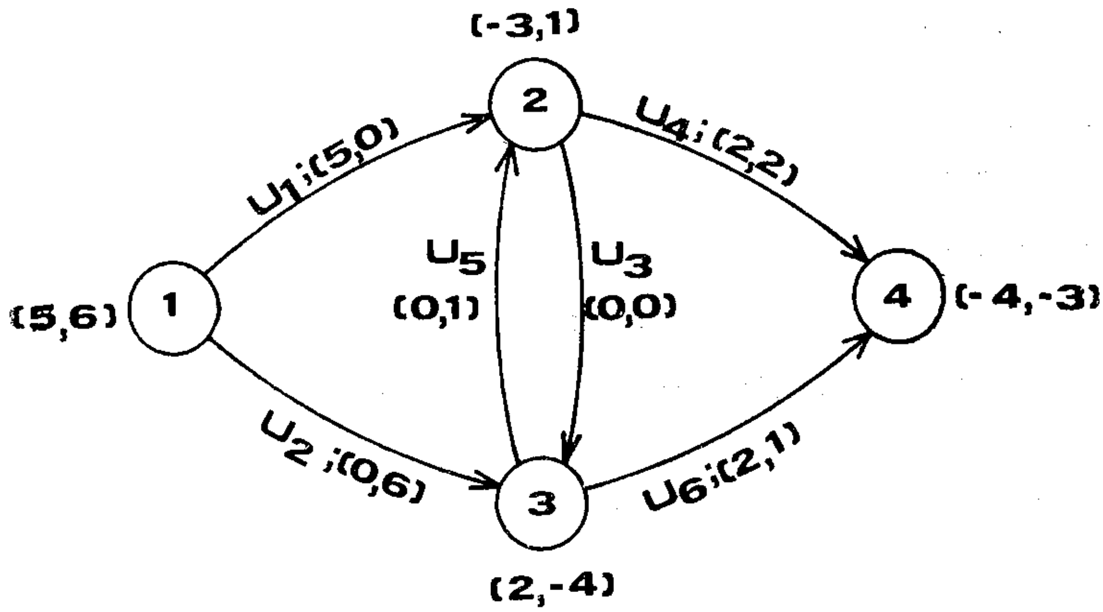
odnosno optimalan nehomogeni tok

$$\varphi^1 = \alpha_1^1 \cdot \varphi_1^1 = [5, 0, 0, 2, 0, 2]^t$$

$$\varphi^2 = \alpha_2^2 \varphi_2^2 + \alpha_3^2 \cdot \varphi_3^2 = [0, 6, 0, 2, 1, 1]^t$$

$$\varphi = [5, 0, 0, 2, 0, 2; 0, 6, 0, 2, 1, 1]^t$$

Minimalni ukupni troškovi iznose 44 novčane jedinice.



Sl. 2. — Optimalan nehomogeni tok

Na sl. 2. u uglatim zagradama unesene su optimalne vrijednosti nehomogenog toka na lukovima mreže.

Ako se radi o mreži većih dimenzija s više od dvije vrste roba, onda rapidno raste broj ograničenja a pogotovo broj varijabli te je postupak dekompozicije potrebno realizirati na elektronskom računaru.

Stjepan Skok

Viša saobraćajna škola,
Zagreb

LITERATURA

[1] Dantzig, G. and Wolfe, Ph., »The Decompozition algorithm for linear program«, *Econometrica* 29, 767—778 (1961)

[2] Ermoljev, J., Meljnik, J., *Ekstremaljnie zadači na grafah*, Naukova dumka, Kiev, 1968.

[3] Ford, L. R. Jr. ond Fulkerson, D. R., *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[4] Hadley, G., *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Comp. inc., London, 1964.

[5] Hu, T. C., »Minimum — Cost Flows in Convex-cost Networks«, *Nav. Res. Log. Q.*, 13, 1—9 (1966)

[6] Hu, T. C., »Multicomodity Network Flows«, *Operat. Res.* 11, 344—360 (1963)

[7] Rotschild, B., Whinston, A., »Feasibility of two comodity Network flows«, *Operat. Res.* 14, 1121—1129 (1966)

[8] Tomlin, J. A., »Minimum-Cost Multicomodity Networks Flows«, *Operat. Res.* 14, 45—51 (1966)