STOHASTIČKO LINEARNO PROGRAMIRANJE

NEKI PRISTUPI I PRIMJENE

Ivo GJENERO)*

UVOD

Primjena klasičnih metoda matematičkog programiranja u problemima optimalnog upravljanja u najširem smislu, pretpostavlja egzaktno definirane parametre u funkciji cilja i u ograničenjima. Na primjer, u primjeni metoda linearnog programiranja na problem optimalne alokacije ograničenih resursa pored linearnosti tehnologije moramo pretpostaviti konstantnost svih parametara koji se pojavljuju u modelu. Svi rezultati dobiveni takvom analizom bitno su ograničeni tom pretpostavkom. Analogna je situacija i u primjeni nelinearnog programiranja. Dakle, radi se redovno o problemima upravljanja uz potpunu određenost. Takvi modeli, međutim, neće se moći primijeniti u mnogim realnim situacijama u kojima postoje elementi slučajnosti ili neodređenosti. Stoga se postavilo pitanje proširenja postojećih metoda matematičkog, posebno linearnog programiranja na slučaj kada parametri nisu konstante, već slučajne varijable s poznatim ili pak nepoznatim karakteristikama razdioba vjerojatnosti. Stohastičko programiranje analizira probleme matematičkog programiranja u kojima su parametri slučajne varijable. Redovno se pretpostavlja da su poznate karakteristike tih slučajnih varijabli (zakoni razdiobe, momenti i slično). Stohastičko linearno programiranje poopćuje teoriju i metode linearnog programiranja u slučaju stohastičkih parametara. To je relativno nova disciplina inicirana radovima G. Tintnera, G. Dantziga, A. Charnesa i W. W. Coopera. Da spomenemo osnovne smjerove u razvoju te discipline.

Ovaj rad treba da posluži kao osnovna informacija o ovim problemima, s time da ćemo detaljnije razraditi samo Charnes-Cooperov pristup problemu.

1. KLASIFIKACIJA PROBLEMA I PRISTUPA PROBLEMU

Pod problemom stohastičkog linearnog programiranja podrazumjevamo problem određivanja $(n \times 1)$ vektora x, takvog da

*) Autor je suradnik u Ekonomskom institutu u Zagrebu. Rad je dio njegove magistarske teze koja je obranjena u Postdiplomskoj školi Jugoslavenskog instituta za ekonomska istraživanja.

$$\max z = c'x \tag{1.1}$$

uz uvjete

$$Ax \leqq b \tag{1.2}$$
$$x \geqq 0$$

gdje je A $(m \times n)$ matrica, c $(n \times 1)$ vektor, b $(m \times 1)$ vektor. Komponente matrice A i vektora b i c u općem slučaju su slučajne varijable.

Teškoće koje se javljaju u rješenju problema (1.1) — (1.2) nisu samo u metodama rješenja problema već i u formulaciji problema dovoljno fleksibilnoj da bi odrazila veoma osjetljive situacije planiranja u uvjetima rizika i neodređenosti. Pod rizikom podrazumijevamo situaciju u kojoj imamo mogućnost na osnovu pokusa, statističkih podataka, istraživanja procesa i slično ustanoviti izvjesne karakteristike zakona vjerojatnosti pojedinih parametara A, b, c, dok pod neodređenosti podrazumjevamo situaciju u kojoj takve mogućnosti nemamo.

Na prvi pogled činilo bi se prihvatljivo umjesto slučajnih parametara uzeti odgovarajuće očekivane vrijednosti i problem (1.1) — (1.2) svesti na problem

$$\max Ec'x \tag{1.3}$$

uz uvjete

$$E A x \leqq E b$$
$$x \geqq 0 \tag{1.4}$$

te umjesto problema (1.1) — (1.2) promatrati običan problem linearnog programiranja (1.3) — (1.4). Takav postupak, međutim, rijetko kada vodi do prihvatljivog rješenja. Tako bi se eventualno moglo postupati u slučaju da su svi elementi matrice A i vektora b konstante, dok su slučajne varijable jedino komponente vektora c. U slučaju da su neka ograničenja stohastička ovakovo rezoniranje nas može dovesti do rješenja koje ne zadovoljava ograničenjima. Općenito, problemi se javljaju u vezi sa slučajnim ograničenjima, jer se postavlja pitanje šta je to moguće rješenje. Da li je to determinirana ili slučajna varijabla, da li moguće rješenje mora zadovoljavati ograničenja pri svakoj realizaciji slučajnih parametara ili se pak mogu prihvatiti i takva rješenja koja neće zadovoljavati svako ograničenje pri svim realizacijama slučajnih varijabli A i b, tako da na neki način kompenziramo taj eventualni nesklad. Nadalje je pitanje kako definirati funkciju cilja. Tu postoje različite mogućnosti. Možemo za funkciju cilja uzeti funkciju $E\,c'x$, dakle očekivanu vrijednost linearne forme — takve probleme često zovemo E-modelima. Možemo za funkciju cilja uzeti varijansu linearne forme, tzv. V-model; linearnu kombinaciju očekivane vrijednosti i varijanse linearne forme tzv. EV-model; vjerojatnost da funkcija cilja premaši neku fiksiranu vrijednost, tzv. P-model; očekivanu vrijednost funkcije korisnosti linearne forme tzv. U-model itd. Najčešće se definira rješenje kao determinirani vektor i odgovarajuća funkcija cilja te se problem stohastičkog programiranja (1.1) — (1.2) svede na pripadni (u smislu definicije rješenja i funkcije cilja) deterministički problem programiranja, koji najčešće pripada klasi problema nelinearnog programiranja. Rješenje tog problema uzima se za rješenje polaznog problema stohastičkog programiranja.

Različite pristupe problemima stohastičkog programiranja možemo klasificirati u tri glavna tipa.

a) *Programiranje uz probabilistička ograničenja* (chance constrained programming) Charnes, Cooper /3, 4/. U ovom pristupu zamjenjujemo ograničenja (1.2) sa

$$P\ (Ax \leqq b) \geqq \alpha \qquad (1.5)$$

gdje P označava vjerojatnost, dok je $\alpha\ (m \times 1)$ vektor s elementima $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$, $(i = 1, \ldots, m)$. U toj formulaciji i-to ograničenje je oblika

$$P\left(\sum_j a_{ij}\, x_j \leqq b_i\right) \geqq \alpha_i$$

Prema tome i-to ograničenje može biti narušeno uz vjerojatnost koja nije veća od $1 - \alpha_i$. U slučaju da neko ograničenje ne sadrži slučajne parametre, to se ograničenje svodi na ograničenje oblika

$$\sum_j a_{ij}\, x_j \geqq b_i.$$

Ukoliko neko ograničenje mora biti bezuvjetno zadovoljeno, tada za odgovarajući α_i uzimamo jedinicu.

b) *Dvoetapno stohastičko programiranje.* Dantzig-Madansky/10/, Madansky /17/. Opća struktura dvoetapnog modela programiranja može se napisati kao

$$Min\ (c'x + E\ min\ f'y) \qquad (1.6)$$

uz uvjete

$$b_1 = A_{11}\ x \qquad (1.7)$$

$$b_2 = A_{21}\ x + A_{22}\ y \qquad (1.8)$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0 \qquad (1.9)$$

gdje su A_{ij} poznate matrice, b_1 poznat vektor, b_2 slučajan vektor s poznatim zakonom razdiobe. Pretpostavlja se da za svaki izbor x u prvoj etapi, postoji bar jedan mogući y u drugoj etapi (tj. pretpostavka postojanja permanentnih rješenja). Proces odlučivanja provodi se tako da se prvo odabere x koji zadovoljava ograničenja prve etape (1.7). Nakon tog izbora realizira se slučajna varijabla b i moguća je kompenzacija vektorom $y \geqq 0$ nezadovoljenja pojedinih ograničenja s odabranim x-om, uz troškove »penala« dane s $f'y$, gdje je $f \geqq 0$ poznat vektor. Radi toga preinačujemo uobičajenu funkciju cilja $c'x$ i i za novu funkciju cilja uvodimo $c'x$ više očekivane najmanje troškove »penala«, tj.

$$c'x + E\ min\ f'y.$$

c) *Stohastičko linearno programiranje.* Različit pristup stohastičkom linearnom programiranju kojeg sugerira G. Tintner /19, 20, 21/ usredotočen je na određivanje statističke razdiobe funkcije cilja i na posljedice koje takva razdioba ima na rješenje problema. U ovom slučaju se pretpostavlja

da je problem definiran s (1.1) — (1.2) i da su elementi A, b, c slučajne varijable s poznatim združenim zakonom vjerojatnosti

$$P\ (A,\ b,\ c) \qquad (1.10)$$

Ovdje razlikujemo dva pristupa — problem distribucije optimalnih vrijednosti funkcije cilja i problem očekivanih vrijednosti (Vajda /22/). U problemu očekivanih vrijednosti promatramo optimizaciju očekivane vrijednosti funkcije cilja. U problemu distribucije pokušavamo izvesti statističku razdiobu vjerojatnosti funkcije cilja z.

Ukoliko se slučajna varijabla pojavljuje jedino u funkciji cilja a ne i u ograničenjima, problem se u znatnoj mjeri pojednostavljuje. Naime ne postoje dileme oko mogućeg rješenja. Skup mogućih rješenja je konveksan poliedarski skup $D = \{x \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0\}$ kao i u klasičnom problemu linearnog programiranja i čitav problem se svodi na određivanje vektora $x \varepsilon D$ koji optimizira funkciju cilja pridruženu toj situaciji. Često se postupa na ovaj način — promatra se korisnost svake pojedinačne vrijednosti funkcije cilja, tj. korisnost od $c'x$ za svaki pojedini c i uzima se očekivana vrijednost korisnosti od $c'x$ preko razdiobe vjerojatnosti vektora c i takva funkcija se optimizira. Ako je funkcija korisnosti linearna s obzirom na funkciju cilja često se problem svodi na optimiziranje skalarnog produkta od Ec i x, te problem postaje običan problem linearnog programiranja.

Često se uzima za funkciju korisnosti $E\ (c'x)$ i problem će se svesti na problem $max\ E\ (c')x$ u slučaju da su c i x nezavisni i neće biti nikakvih teškoća. Međutim, može se dogoditi da su pojedini c_j zavisni o x_j, tj. da je $c_j\, x_j = \varphi_j\, (x_j,\, c_j)$ odnosno $E\ \ \varphi_j\, (x_j,\, c_j) = f_j\, (x_j)$. U tom slučaju funkcija cilja je $\sum_j f_j\, (x_j)$ te se problem svodi na

$$\begin{array}{l} max\ (min)\ \sum_j f_j\, (x_j) \\ x\ \varepsilon\ D \end{array} \qquad (1.11)$$

Ako su $f_j\ (x_j)$ konveksne funkcije po x_j dolazimo do problema tzv. separabilnog konveksnog programiranja koji se svodi (Charnes, Lemke /7/, Dantzig /8/) na problem linearnog programiranja s velikim brojem varijabli i neka dodatna ograničenja i da se riješiti revidiranom simpleks metodom ili na problem linearnog programiranja s omeđenim varijablama koji se naročito efikasno može riješiti primjenom metoda dekompozicije (Dantzig, Wolfe /11/). Radi ilustracije razmotrićemo slijedeći primjer (Dantzig /9/). Neka je x_j obujam j-tog dobra koje se proizvodi u linearnom ekonomskom modelu, te ograničenja $Ax \leqq$ b, $x \geqq 0$ predočavaju proizvodne mogućnosti. Troškovi proizvodnje j-tog proizvoda sastoje se od tri komponente: c_{oj} determinirani troškovi proizvodnje jedinice proizvoda, c_{1j} determinirani troškovi skladištenja jedinice proizvoda preostalog nakon realiziranja slučajne tražnje d, c_{2j} troškovi nastali uslijed nezadovoljenja jedne jedinice tražnje dobra j. Tada se problem sastoji u minimiziranju funkcije.

$$\varphi = \sum_j c_{oj}\, x_j + \sum c_{1j}\, E\, (x_j - d_j \mid x_j > d_j) + \sum_j c_{2j}\, E\, (d_j - x_j \mid x_j < d_j)$$

gdje je $E(A/B)$ uvjetna očekivana vrijednost od A uz uvjet B. Ovaj problem se može formulirati kao dvoetapni stohastički linearni program. Napomenimo da S. E. Elmaghraby /12/ ovaj problem, uz pretpostavke da su tražnje pojedinih proizvoda nezavisne i da je funkcija razdiobe tražnje stacionarna u vremenu, svodi na problem linearnog programiranja s omeđenim varijablama. Na osnovu Elmaghrabyjevog modela J. Koenig /16/ razmatrao je optimalni plan proizvodnje poduzeća u naftnoj industriji uz slučajnu tražnju.

Ponekad je zgodnije promatrati ne očekivanu vrijednost već varijansu funkcije cilja, dakle upotrebiti V model, tj. promatrati problem

$$min\ V, \text{ uz ograničenje } E\ (c'x) \geqq E^*$$

gdje je E^* neka zadana vrijednost. Takav problem se često svodi na problem parametarskog linearnog programiranja.

Poznat mi je jedan jedini problem s nelinearnom funkcijom korisnosti (R. Freund /14/) u kome je bila riječ o maksimizaciji funkcije korisnosti oblika $1 - e^{-\alpha c'x}$, gdje je vektor c bio normalno raspoređen. Problem se sveo na problem kvadratnog programiranja za čije rješenje postoji čitav niz metoda (Beale /2/, Wolfe /24/, Frank i Wolfe /13/, Barankin i Dorfman /1/ itd.).

Prije nego pređemo na detaljno razmatranje pojedinih pristupa problemima stohastičkog linearnog programiranja, razmotrit ćemo jedan krajnji slučaj formulacije mogućeg rješenja. Neka matrica A i (ili) vektor b imaju slučajne elemente, tj. neka su ograničenja slučajna. A. Madansky /17/ uvodi tzv. grubo rješenje (fat solution). Rezonira na ovaj način: želimo odrediti vektor x prije nego znamo konkretne realizacije slučajnih varijabli A i b. Pitanje je da li rješenje x zadovoljava ograničenja. Za svaku konkretnu realizaciju A i b skup mogućih x-ova je konveksan poliedar i $S = \bigcap_{A,b} \{x | x \geqq 0, Ax \leqq b\}$ je konveksan skup permanentno mogućih rješenja. Optimalno rješenje problema je onaj vektor $x \in S$ koji maksimizira funkciju cilja. Ako je $X \in S$ i ako je optimalan za ma koji partikularni problem, tada je x optimalno rješenje ovako formuliranog problema. Pitanje je da li je S prazan skup. Nadalje, ako elementi od A i b mogu uzimati ma koje vrijednosti tada nam »fat« formulacija neće biti od koristi. Često se postupa na ovaj način: Neka A^0, b^0 čine neki mogući par, tj. neka je vjerojatnost njihove realizacije pozitivna. Neka je x^0 rješenje problema $max\ c'x$ uz $A^0x \leqq b^0$. Ako je x^0 permanentno rješenje, tada je i optimalno rješenje. Dakle može se postupati tako da se traži permanentno rješenje koje je rješenje determiniranog problema linearnog programiranja uz par A^0, b^0. Često se za A^0, b^0 uzima EA, Eb uz uvjet da je EA, Eb moguć par. Ako je $\bar{x}$ optimalno rješenje determiniranog problema uz par A^0, b^0, provjeravanje njegove optimalnosti s obzirom na problem stohastičkog programiranja svodi se na provjeravanje njegove permanentnosti. Ako je $a_{ij}^- \leqq a_{ij} \leqq a_{ij}^+, b_i^- \leqq b_i \leqq b_i^+$ za svaki i, j, lako se vidi da je $\bar{x}$ permanentno rješenje čim je

$$\max_i \left[\sum_j a_{ij}^+ \bar{x}_j - b_i^- \right] \leqq 0.$$

Ako je broj realizacija od (A, b) konačan, može se postupiti na ovaj način: Numeriramo sve moguće realizacije $(A, b)_r$, $(r = 1, \ldots, R)$. Permanentno moguće rješenje mora zadovoljavati nejednakosti

$$x \geqq 0, \quad A^r x \leqq b^r, \quad (r = 1, \ldots R)$$

i na tom skupu ograničenja maksimiziramo funkciju cilja, čime se problem svodi na običan problem linearnog programiranja ako je funkcija cilja $E\ (c')x$.

Rješenje problema u »fat« formulaciji za slučaj da A i b imaju neprekidne razdiobe vjerojatnosti u literaturi se ne spominje. Izgleda da tih metoda i nema. Taj bi se problem u načelu dao riješiti aproksimacijom razdioba za A i b diskretnim razdiobama s konačnim brojem realizacija, ali se postavlja problem dimenzija pripadnog problema linearnog programiranja.

Rješenje problema u razmatranoj formulaciji nije stohastičko, problem je sveden na determinirani problem linearnog programiranja zamjenom parametara njihovim pesimističkim procjenama. Rješenje se traži u oblasti uvijek mogućih rješenja, tj. dopustivih s vjerojatnosti $p = 1$. Ovakva formulacija je nedovoljno fleksibilna i svakom ograničenju daje podjednaku težinu. Zapravo je to krajnji slučaj Charnes-Cooperove formulacije u kojoj su sve komponente vektora α jednake jedinici.

2. PROGRAMIRANJE UZ PROBABILISTIČKA OGRANIČENJA

2.1. Model Charnes-Coopera

U seriji članaka A. Charnes i W. Cooper /3, 4, 6/ razvili su formulaciju problema stohastičkog programiranja poznatu kao »optimiziranje uz probabilistička ograničenja« (chance constrained programming). Kako je već rečeno u toj se formulaciji problem (1.1) — (1.2) promatra u obliku

$$\text{Optimizirati } f(c,x) \tag{2.1}$$

uz uvjete

$$P\ (Ax \leqq b) \geqq \alpha \tag{2.2}$$

gdje je $f(c, x)$ odabrana funkcija cilja, P označava vjerojatnost, α je $(m \times 1)$ vektor s komponentama $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$.

Rješenje x može se formulirati kao determinirani ili slučajni vektor i autori se pretežno bave formulacijom vektora x kao slučajnog vektora.

U slučaju fiksirane matrice A i slučajnog vektora ograničenja b, problem se može svesti na problem linearnog programiranja. Neka je $\varphi(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ višedimenzionalni zakon vjerojatnosti vektora b. Marginalni zakon vjerojatnosti komponente b_i tada je

$$\varphi_i\ (b_i) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\ (b_1, \ldots, b_m) \prod_{j=i} db_i. \tag{2.3}$$

otuda imamo

$$\int_{-\infty}^{\tilde{b}_i} \varphi_i(b_i)\, db_i + \int_{\tilde{b}_i}^{\infty} \varphi_i(b_i)\, db_i = 1 \qquad (2.4)$$

za bilo koju vrijednost $\tilde{b}_i$. Izračunajmo $\tilde{b}_i$ iz

$$\int_{-\infty}^{\tilde{b}_i} \varphi_i(b_i)\, db_i = 1 - \alpha_i \qquad (2.5)$$

to će biti $\tilde{b}_i = \bar{b}_i \;(1 - \alpha_i)$ i nejednakost

$$P\left(\sum_{j=1} a_{ij}\, x_j \leqq b_i\right) \geqq \alpha_i$$

ekvivalentna je nejednakosti

$$\sum_j a_{ij}\, x_j \leqq b_i\,(1 - \alpha_i).$$

Ako za funkciju cilja uzmemo $Ec'x = \mu'_c\, x$,
gdje je

$$\mu'_c = (\mu_{c_1} \;\; . \; . \; . \;\; \mu_{cn}) \qquad (2.6)$$

vektor sredina komponenata vektora c. U tom slučaju problem postaje

$$\max \mu'_c\, x$$

uz uvjete

$$Ax \leqq \bar{b}\,(1 - \alpha) \qquad (2.7)$$

(Zahtjevi za nenegativnosti rješenja obično se ugrađuju u ograničenja (2.2) i prenose na ograničenja u (2.7)).

U prethodnoj formulaciji problem stohastičkog programiranja sveden je na odgovarajući determinirani problem linearnog programiranja i rješenje problema je determinirani a ne slučajni vektor.

Ponekad u problemima stohastičkog programiranja zahtjevamo da rješenje uz ograničenja (2.2) zadovoljava i dodatne uvjete npr. da je $x =$

$$= \varphi\,(A,\, b,\, c) \qquad (2.8)$$

gdje je φ funkcija iz neke unaprijed zadane klase. Autori promatraju slučaj

$$x = Db \qquad (2.9)$$

gdje je D tražena $(n \times m)$ matrica elemenata d_{ij}. Uz ovaj uvjet rješenje problema x je slučajni vektor, čije su realizacije definirane realizacijom slučajnog vektora ograničenja b.

»E-Model«

Razmotrimo problem stohastičkog programiranja

$$\max Ec'x$$

uz uvjete

$$P\,(Ax \leqq b) \geqq \alpha \qquad (2.10)$$

$$x = Db$$

Funkcija cilja je očekivana vrijednost linearne forme, zato se i govori o E-modelu. Za optimalno rješenje zahtijevamo da pripada unaprijed zadanoj klasi rješenja. Kao i ranije pretpostavljamo da je matrica A konstantna, dok su vektori b i c slučajne varijable. Neka su vektori b i c nekorelirani dok za njihove komponente to ne pretpostavljamo. Da bi došli do determiniranog problema ekvivalentnog problema (2.10) uvrštavamo izraz $x = Db$, tako da funkcija cilja postaje

$$E(c'Db) = (Ec)'D(Eb) \qquad (2.11)$$

(radi nekoreliranosti vektora b i c). Ako označimo $Ec = \mu_c$, $Eb = \mu_b$, to funkcija cilja postaje $\mu'_c\, D\mu_b$.

Problem (2.10) možemo pisati u obliku

$$\max \mu'_c\, D\mu_b$$

uz uvjete

$$P(ADb \leqq b) \geqq \alpha \qquad (2.12)$$

U ograničenjima je sadržan vektor b i problem stoga još nije determiniran. Radi pojednostavljenja uvedimo oznake

$$b^* = b - \mu_b$$

$$a'_i = (a_{i_1}\,,\, .\, .\, .\, .\,,\, a_{in}) \qquad (2.13)$$

tako da je b centrirani vektor, a a'_i i-ti redak matrice A. Pretpostavimo da je vektor b normalno raspoređen.[1])

Ograničenja problema (2.12) možemo pisati

$$P\,(a_i'\, Db - b_i \leqq 0) \geqq \alpha_i,\; i = 1, \ldots, m$$

što daje

$$P\,(a'_i\, Db - b_i \leqq 0) = P\,(b_i - a'_i\, Db \geqq 0) = P\,(b_i^* - a'_i\, Db^* \geqq -\mu_{bi} + a'_i\, D\mu_b) \qquad (2.14)$$

Uz pretpostavku $E\,(b_i^* - a'_i\, Db^*)^2 > 0$, dobivamo

$$P\,(b_i^* - a'_i\, Db^* \geqq -\mu_{bi} + a'_i\, D\mu_b) = P\left(\frac{b_i^* - a'_i\, Db^*}{\sqrt{E\,(b_i^* - a_i'\, Db^*)^2}} \geqq \frac{-\mu_{bi} + a'_i\, D\mu_b}{\sqrt{E\,(\bar{b}_i - a_i'\, Db^*)^2}}\right) \geqq \alpha_i$$

Definiramo li $\quad \varsigma_i = \dfrac{b_i^* - a'_i\, Db^*}{\sqrt{E\,(b_i^* - a'_i\, Db^*)^2}}$

to je ς : N(O,1) to je i-to ograničenje

$$P\left(\varsigma_i \geqq \frac{-\mu_{bi} + a_i'\, D\mu_b}{\sqrt{E\,(b_i^* - a'_i\, Db^*)^2}}\right) \geqq \alpha_i$$

[1]) Ta pretpostavka nije neophodna. Dovoljno je pretpostaviti da je zakon vjerojatnosti varijable $(a'_i\, Db^* - b_i^*)$ simetričan i da je razdioba potpuno definirana s prva dva momenta.

ekvivalentno nejednadžbi

$$1-\Phi\left(\frac{-\mu_{bi}+a_i'\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(b_i^*-a_i'\,Db^*)^2}}\right) \tag{2.15}$$

gdje je $\Phi(x)$ Laplaceova funkcija.

Posljednja nejednadžba ekvivalentna je nejednakosti

$$\frac{-\mu_{bi}+a_i'\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(b_i^*-a_i'\,Db^*)^2}} \leqq \Phi^{-1}\,(1-\alpha_i)=-k_i \tag{2.16}$$

U slučaju $\alpha_i > \frac{1}{2}$ (a samo taj slučaj ima praktično značenje) je $k_i > 0$. Kako su veličine k_i poznate, možemo sada formulirati determinirani ekvivalent našeg »*E*-modela«.

Ograničenja (2.16) uvođenjem novih varijabli v_i možemo pisati u obliku

$$-\mu_{bi}+a_i'\,D\mu_b \leqq -\nu_i \leqq -k_i\sqrt{E\,(b_i^*-a_i'\,Db^*)^2} \leqq 0$$

ili

$$\mu_{bi}-a_i'\,D\mu_b \geqq \nu_i \geqq k_i\sqrt{E\,(b_i^*-a_i'\,Db^*)^2} \geqq 0 \tag{2.17}$$

Parove ograničenja (2.17) možemo pisati

$$\begin{aligned} &-a_i'\,D\mu_b-\nu_i \geqq -\mu_{bi} \\ &-k_i^2\,E\,(b_i^*-a_i'\,Db^*)+\nu_i^2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

uz $\nu_i \geqq 0$, kao par ograničenja ekvivalentan (2.17) za svaki i. Uvedemo li oznake

$$\begin{aligned} &\mu_i\,(D)=E\,(b_i-a_i'\,Db) \\ &\sigma_i^2\,(D)=E\,(a_i'\,Db-b_i)^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

tada naš problem postaje

$$\max\ \mu_c'\,D\mu_b$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} &\mu_i\,(D)-\nu_i \geqq 0 \\ &k_i^2\,(\mu_i^2\,(D)-\sigma_i^2\,(D))+\nu_i^2 \geqq 0 \\ &\nu_i \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Determinirani problem (2.20) je problem konveksnog programiranja u varijablama D i v. Skup ograničenja $\mu_i\,(D)-\nu_i \geqq 0$ odgovara konačnom broju poluprostora prostora R^{mn+m}, a njihov presjek je konveksan poliedar. Svako ograničenje

$$k_i^2\,(\mu_i^2\,(D)-\sigma_i^2\,(D))+\nu_i^2 \geqq 0$$

predočava unutrašnjost »gornje« (u smislu osi v_i) plohe dvoplošnog hiperboloida, što je također konveksan skup. Kako je presjek konveksnih skupova konveksan to je problem (2.20) problem konveksnog programiranja.

»*V-Model*«

Uzmemo li za funkciju cilja očekivanu vrijednost kvadrata razlike linearne forme $c'x$ i zadanog broja $c^{0\prime}x^0$, postupkom kao u prethodnom izlaganju pokazuje se ekvivalentnost problema stohastičkog programiranja (V-modela)

$$\min\ E(c'x-c^{0\prime}x^0)^2$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} &P(Ax \leqq b) \geqq \alpha \\ &x=Db \end{aligned} \tag{2.21}$$

i determiniranog problema konveksnog programiranja

$$\min\ V(D)=\min\ E\,(c'Db)-c^{0\prime}x^0)^2$$

uz ograničenja

$$\begin{aligned} &\mu_i\,(D)-\nu_i \geqq 0 \\ &k_i^2\,(\mu_i^2\,(D)-\sigma_i^2\,(D))+\nu_i^2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Taj determinirani ekvivalent programa (2.21) opet je problem konveksnog programiranja. Ograničenja su istog oblika kao i u (2.20), a razlikuju se jedino funkcije cilja.

»*P-Model*«

Izračunati vektor x za koji se postiže maksimalna vjerojatnost P da linearna forma premaši zadanu vrijednost $c^{0\prime}x^0$.

$$\max\ P\ (c'x \geqq c^{0\prime}x^0) \tag{2.23}$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} &P(Ax \leqq b) \geqq \alpha \\ &x=Db\,. \end{aligned}$$

Uvedimo slučajnu varijablu

$$\eta=\frac{c'\,Db-\mu_c'\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,Db-\mu_c'\,D\mu_b)^2}} \tag{2.24}$$

i promatrajmo slučajeve u kojima η pripada normalnoj razdiobi. Očito je $E\,\eta=0$, $E\,\eta^2=1$, tako da je uz tu pretpostavku η normalna standardizirana slučajna varijabla

$$P\,(c'x \geqq c^{0\prime}\,x^0)=P\left(\frac{c'\,Db-\mu'c\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,Db-\mu_c'\,D\mu_b)^2}} \geqq \frac{c^{0\prime}\,x^0-\mu_c'\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,Db-\mu_c'\,D\mu_b)^2}}\right)=$$

$$=P\left(\eta \geqq \frac{c^{0\prime}\,x^0-\mu_c'\,D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,D_b-\mu_c'\,D\mu_b)^2}}\right)$$

to se funkcija cilja može pisati

$$max\, P\left(\eta \geqq \frac{c^{\circ\prime} x^{\circ} - \mu_c{}' D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,Db - \mu_c{}'\,D\mu_b)^2}}\right)$$

što je ekvivalentno s

$$min\, \frac{c^{\circ\prime} x^{\circ} - \mu_c{}' D\mu_b}{\sqrt{E\,(c'\,Db - \mu_c{}'\,D\mu_b)^2}}$$

ili, što je isto

$$max\, \frac{\mu_c{}' D\mu_b - c^{\circ\prime} x^{\circ}}{\sqrt{E\,(c'\,Db - \mu_c{}'\,D\mu_b)^2}}.$$

Uvedimo nove varijable v_0 i w_0, tako da je

$$w_0{}^2 \geqq V\,(D) = E\,(c'\,Db - \mu_c{}'\,D\mu_b)^2$$
$$v_0 \leqq \mu_c{}'\,D\mu_b - c^{\circ\prime}\,x^{\circ}$$

Ograničenja problema prelaze u isti oblik kao i ograničenja problema u slučaju E-modela, tako da se problem stohastičkog programiranja (2.23) svodi na slijedeći determinirani problem.

$$max\; V_0/W_0$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} &\mu'_c\,D\mu_b - v_0 \geqq c^{\circ\prime}\,x^{\circ} \\ &-V\,(D) + w_0{}^2 \geqq 0 \\ &\mu_i\,(D) - v_i \geqq 0 \\ &k_i{}^2\,[\mu_i{}^2\,(D) - \sigma_i{}^2\,(D)] + v_i{}^2 \geqq 0 \\ &v_i \geqq 0,\ w_0 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Interesantan nam je praktički jedino slučaj $V(D) > 0$, tako da je $w_0 > 0$. Transformacijom $t = 1/w_0$ rješavamo se razlomljeno linearne funkcije cilja. Označimo li

$$\begin{aligned} &\overline{D} = tD,\ \overline{v} = tv,\ \overline{w_0} = tw_0 = 1 \\ &\overline{V}\,(\overline{D}) = E\,(c'\,\overline{D}b - t\,c^{\circ\prime}\,x^{\circ})^2 \\ &\overline{\sigma}_i{}^2\,(\overline{D}) = E\,(tb_i - a'_i\,\overline{D}b)^2 \\ &\overline{\mu}_i\,(\overline{D}) = E\,(tb_i - a'_i\,\overline{D}b) \end{aligned} \tag{2.26}$$

u novim varijablama $\overline{d}_{ij} = t\,d_{ij}$, $\overline{v_i} = tv_i$ problem stohastičkog programiranja (2.23) svodi se na ekvivalentan determinirani problem konveksnog programiranja.

$$max\; \overline{v_0}$$

uz uvjete

$$\begin{aligned} &\mu'_c\,\overline{D}\mu_b - \overline{v}_0 \geqq t\,c^{\circ\prime}\,x^{\circ} \\ &-\overline{V}\,(\overline{D}) + 1 \geqq 0 \\ &\overline{\mu}_i\,(\overline{D}) - \overline{v_i} \geqq 0 \\ &-k_i{}^2\,[\sigma_i{}^2\,(\overline{D}) - \overline{\mu}_i{}^2\,(\overline{D})] + \overline{v_i}{}^2 \geqq 0 \\ &t \geqq 0,\ \overline{v_i} \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{2.27}$$

Pokazano je, dakle, da se uz prihvaćene pretpostavke u svim navedenim slučajevima problem stohastičkog programiranja svodi na problem konveksnog programiranja koji možemo riješiti npr. gradijentnom metodom (2).

Neke primjene

a) *Problem planiranja proizvodnje.* (Charnes, Cooper, Symonds /5/). Odrediti količine proizvodnje x_t homogenog proizvoda u T vremenskih perioda $(t = 1, \ldots, T)$, tako da se postigne minimalna vrijednost očekivanih ukupnih troškova proizvodnje i skladištenja proizvoda i da se zadovolje uvjeti:

1) potrebno je osigurati uz vjerojatnost ne manju od p_t^1 zadovoljenje tražnje b_t $(t = 1, \ldots, T)$, koja je slučajna normalno raspoređena varijabla.

2) zalihe u_t na početku t-og perioda se uz vjerojatnost ne manju od p_t^2 moraju nalaziti u unaprijed zadanim granicama u_{min} i u_{max}.

Uvjete 1) i 2) možemo formulirati

$$\begin{aligned} &P\,(x_t + u_t - b_t \geqq 0) \geqq p_t^1 \\ &P\,(u_{min} \leqq x_t + u_t - b_t \leqq u_{max}) \geqq p_t^2 \\ &x_t \geqq 0,\ u_t \geqq 0,\ t = 1, \ldots, T \end{aligned} \tag{2.28}$$

Zalihe u_t na početku t-og perioda su na slijedeći način vezane uz proizvodnju i tražnju u prethodnom periodu

$$u_t = \begin{cases} x_{t-1} + u_{t-1} - b_{t-1}, & ako\ je\ x_{t-1} + u_{t-1} - b_{t-1} \geqq 0 \\ 0, & ako\ je\ x_{t-1} + u_{t-1} - b_{t-1} < 0,\ t = 1, \ldots, T \end{cases}$$

$$x_0 = 0,\ b_0 = 0,\ u_0 \text{ zadana veličina,}$$

odakle je (2.29)

$$u_t = max\,(x_{t-1} + u_{t-1} - b_{t-1}, 0)$$
$$x_0 = 0,\ b_0 = 0,\ u_0 \text{ zadano}$$

Označimo s c_t^1 i c_t^2 troškove proizvodnje odnosno skladištenja proizvoda u periodu t. Troškovi mogu također biti slučajne veličine (npr. mogu zavisiti o vremenskim prilikama).

Problem možemo formulirati kao E-model, tj. minimizirati

$$E\left(\sum_{t=1}^{T} c_t^1 x_t + \sum_{t=1}^{T} c_t^2 u_t\right) \qquad (2.30)$$

uz ograničenja (2.28) i (2.29).

Kako se odluka x_t donosi na početku perioda t na osnovu tražnje u prethodnim periodima, to je x_t funkcija slučajnih varijabli $b_1, b_2, \ldots, b_{t-1}$. Ako pretpostavimo da je ta zavisnost linearna, imat ćemo

$$x_t = d_{t0} + \sum_{i=1}^{t-1} d_{ti}\, b_i \qquad (2.31)$$

To dodatno ograničenje svodi problem planiranja proizvodnje na problem oblika (2.10), gdje je matrica D trokutasta matrica. Izbor d_{ti}-ova, koji osiguravaju minimalne očekivane troškove proizvodnje i skladištenja proizvoda svodi se na taj način na problem konveksnog programiranja, kako je to naprijed pokazano.

Ponekad je možda svrsishodnije umjesto razmatranog E-modela, razmatrati V-model ili P-model. Naime planira li se proizvodnja više poduzeća, važno je osigurati jednoliku razdiobu troškova među poduzećima i umjesto E-modela primjeniti V-model, tj. funkciju cilja (2.30) zamijeniti funkcijom

$$E(c'x - c^{0\prime}x^0)^2$$

gdje veličina c'^0x^0 definira planirane troškove proizvodnje i skladištenja proizvoda. U slučaju kada je potrebno osigurati da troškovi ne probiju neki zadani nivo, svrsishodno je primjeniti P-model.

b) *Model investiranja uz rizik* (Näslund /18/). Autor razmatra problem investicione odluke uz uvjete neodređenosti, na taj način da u Weingartnerov /23/ model uvodi stohastičke elemente. U početku promatra »perfektno tržište kapitala«, pod čime podrazumjeva okolnosti da se na početku sa komitentima ugovara fiksna kamatna stopa r, koja se neće u budućnosti mijenjati s tražnjom za sredstvima. U drugom dijelu rada autor se oslobađa te pretpostavke. Promatra n aktivnosti $(j = 1, \ldots, n)$ i vremenski period od T jedinica vremena $(t = 1, \ldots, T)$.

Neka su

- D_t — sredstva stvorena u periodu t u drugim aktivnostima a ne u investicionim projektima koji se razmatraju;
- a_{tj} — tok sredstava prouzrokovan projektom j u vremenu t; pozitivan znak označava izdana sredstva, a negativan dobivena sredstva;
- v_t — sredstva dana na zajam u periodu t uz kamatnu stopu;
- w_t — sredstva uzeta na zajam u periodu t uz kamatnu stopu r;
- r — kamatna stopa;
- x_j — prihvaćeni dio j-tog investicionog projekta, $x_j = 0$, $x_j = 1$;
- $\hat{a}_j$ — ukupna vrijednost svih sredstava koja će dati projekt j u čitavom periodu.

Weingartner problem formulira kao

$$\max z = \sum_j \hat{a}_j x_j + v_T - w_T \qquad (2.32)$$

uz ograničenja

$$\sum_j a_{1j} x_j + v_1 - w_1 \leqq D_1$$

$$\sum_j a_{tj} x_j - (1 + r)\, v_{t-1} + (1 + r)\, w_{t-1} + v_t - w_t \leqq D_t$$

$$(t = 2, \ldots, T) \qquad (2.33)$$

$$x_j \geqq 0,\ x_j \leqq 1,\ v_t \geqq 0,\ w_t \geqq 0,$$

tj. maksimizira ukupna sredstva koja će dati projekt u periodu T više razlika između uloženih i uzetih sredstava uz ograničenja da izdatak sredstava u svakom pojedinom periodu ne može biti veći od priliva sredstava. U ovaj model autor uvodi stohastičke elemente. Pretpostavlja se da su a_{tj} slučajne varijable normalno raspoređene sa sredinama μ_{tj} i varijancama σ_{tj}^2, tj. a_{tj}: $N(\mu_{tj}, \sigma_{tj}^2)$ i da su za svako pojedino t slučajne varijable a_{tj} nezavisne. Problem formulira kao problem stohastičkog programiranja uz probabilistička ograničenja. Umjesto ograničenja (2.23) polazi od ekvivalentnih ograničenja

$$\sum_j a_{1j} x_j + v_1 - w_1 = D_1$$

$$\sum_{t=1}^{t} \sum_j a_{tj} x_j - \sum_{i=1}^{t-1} v_t r + \sum_{t=1}^{t-1} w_t r + v_t - w_t \leqq \sum_{i=1}^{t-1} D_t \qquad (2.34)$$

te u novoj formulaciji promatra problem stohastičkog programiranja

$$\max E\left(\sum_j \hat{a}_j x_j + v_T - w_T\right) \qquad (2.35)$$

uz ograničenja

$$P\left(\sum_j a_{1j} x_j + v_1 - w_1 \leqq D_1\right) \geqq \alpha_1 \qquad (2.36)$$

$$P\left(\sum_{t=1}^{t-1} \sum_j a_{tj} x_j - \sum_{t=1}^{t-1} v_t r + \sum_{t=1}^{t-1} w_t r + v_t - w_t \leqq \sum_{t=1}^{t} D_t\right) \leqq \alpha_t$$

$$t = 2, \ldots, T$$

$$x_j \geqq 0,\ x_j \leqq 1,\ v_t \geqq 0,\ w_t \geqq 0,$$

gdje su α_t zadani nenegativni brojevi koji nisu veći od jedan. Ekvivalentan determinirani problem je

$$\max \sum_j a_j x_j + v_T - w_T \qquad (2.37)$$

uz ograničenja

$$\sum_j \mu_{1j} x_j + \nu_1 - w_1 + \Phi^{-1}(\alpha_1) \sqrt{\sum_j \sigma_{1j}^2 x_j^2} \leqq D_1$$

$$\sum_{l=1}^{t} \sum_j \mu_{lj} x_j - \sum_{l=1}^{t-1} \nu_l r + \sum_{l=1}^{t-1} w_l r + \nu_t - w_t + \Phi^{-1}(\alpha_t) \sqrt{\sum_j \sigma_{tj}^2 x_j^2} \leqq \sum_{l=1}^{t} D_l$$

$$x_j \geqq 0,\ x_j \leqq 1,\ \nu_t,\ w_t \geqq 0 \qquad (2.38)$$

U slučaju da se ne pretpostavi nezavisnost slučajnih varijabli a_{tj} u izrazima pod korijenom doći će i kovarijanse. Model se može proširiti i na slučaj da je D_t normalno raspoređeno. Problem (2.37) — (2.38) je problem konveksnog programiranja.

2.2. *Model Kataoke*

Japanski matematičar S. Kataoka /15/ promatra slijedeći model programiranja uz probabilistička ograničenja

$$\max f$$

uz uvjete

$$P(c'x \leqq f) = \beta$$

$$P(Ax \leqq b) \geqq \alpha \qquad (2.39)$$

E-model nije autoru izgledao pogodan jer se u slučaju velike disperzije izrazi $c'x$ mogu realizirati na niskom nivou. Stoga je formulirao funkciju cilja u navedenom obliku.

Pretpostavlja se da je A konstantna matrica, dok su b i c slučajni vektori.

P r e t p o s t a v k a 1. Vektor b je normalno raspoređen.

Iz pretpostavke slijedi da je svaka komponenta vektora b normalno raspoređena *tj.* b_i: $N(\overline{b_i}, \sigma_{bi}^2)$ tako da možemo pisati

$$P\left(\sum_j a_{ij} x_j \leqq b_i\right) = P\left(\frac{b_i - \overline{b_i}}{\sigma_{bi}} \geqq \frac{\Sigma\, a_{ij} x_j - \overline{b_i}}{\sigma_{bi}}\right) = G\left(\frac{\Sigma\, a_{ij} x_j - b_i}{\sigma_{bi}}\right)$$

gdje je $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$

tako da je ograničenje $P\left(\sum_i a_{ij} x_j \leqq b_i\right) \geqq \alpha_i$ ekvivalentno ograničenju

$$G\left(\frac{\sum_j a_{ij} x_j - \overline{b_i}}{\sigma_{bi}}\right) \geqq \alpha_i$$

što daje

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqq \overline{b_i} + \sigma_{bi} G^{-1}(\alpha_i) \qquad (2.40)$$

kako je interesantan jedino slučaj $\alpha_i > 0{,}5$, to je $G^{-1}(\alpha_i) = -q_i < 0$ tako da (2.40) postaje

$$\sum_j a_{ij} x_j \leqq \overline{b_i} - q_i \sigma_{bi},\ q_i > 0$$

Uvedemo li vektor b^* tako da je

$$b_i^* = b_i - q_i \sigma_{bi} \qquad (2.41)$$

ograničenje $P(Ax \leqq b) \geqq \alpha$

možemo zamijeniti ekvivalentnim determiniranim ograničenjem

$$Ax \leqq b^* \qquad (2.42)$$

Vektor c je slučajan vektor i neka je $\overline{c} = Ec$ vektor sredina, $V = E(c-\overline{c})(c-\overline{c})' = [v_{ij}]$ pripadna disperziona matrica. Tada je

$$Ec'x = \overline{c}'x,$$

$$Var\ c'x = E(c'x - \overline{c}'x)^2 = x'Vx.$$

P r e t p o s t a v k a 2. Vektor c je normalno raspoređen s vektorom sredina $\overline{c}$ i disperzionom matricom V.

Tada je $P(c'x \leqq f) = P\left(\frac{c'x - \overline{c}'x}{\sqrt{x'Vx}} \leqq \frac{f - \overline{c}'x}{\sqrt{x'Vx}}\right) = \Phi\left(\frac{f - \overline{c}'x}{\sqrt{x'Vx}}\right)$

gdje je $\Phi(x)$ Laplaceova funkcija, tako da uvjet $P(c'x \leqq f) = \beta$ zamjenjujemo ekvivalentnim uvjetom

$$\Phi\left(\frac{f - \overline{c}'x}{\sqrt{x'vx}}\right) = \beta$$

ili

$$f = \overline{c}'x + \Phi^{-1}(\beta) \sqrt{x'Vx} \qquad (2.43)$$

Kako je interesantan jedino slučaj $\beta < 0{,}5$ to je $\Phi^{-1}(\beta) = -q < 0$, te (2.43) pišemo u obliku

$$f = \overline{c}'x - q\sqrt{x'Vx},\quad q > 0 \qquad (2.44)$$

Na osnovu izloženog problem (2.39) možemo pisati u obliku

$$\max f = \overline{c}'x - q\sqrt{x'Vx}$$

uz uvjete $Ax \leqq b^*$ (2.45)

$$x \geqq 0,$$

gdje je $q = -\Phi^{-1}(\beta)$, $q_i = -G^{-1}(\alpha_i)$.

Funkcija cilja u problemu (2.45) je konkavna funkcija, što proizlazi iz konveksnosti funkcije $\sqrt{x'Vx}$, te se radi o maksimizaciji konkavne funkcije na konveksnom skupu, tako da je svaki lokalni maksimum problema ujedno i globalni maksimum. Kataoka /15/ daje iterativnu metodu za rješenje tog problema.

LITERATURA

1. Barankin, E. W. and Dorfman R., *Towards quadratic programming*, Univ. of California, Berkeley, 1955.
2. Beale, E. M. L., *On quadratic programming*, Nav. Res. Log. Quart. 6, 1959, 227—243.
3. Charnes, A. and Cooper W. W., *Chance constrained programming*, Manag. Sci. 6, 1959, 73—79.
4. Charnes, A. and Cooper W. W., *Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints*. Oper. Res. *11*, 1963, 18—39.
5. Charnes, A., Cooper, W. W. and Symonds, G. H., *Cost horizonts and certainty equvalents*, Manag. Sci. *4*, 1958, 235—263.
6. Charnes, A., Cooper, W. W. and Thompson, W., *A caracterizations by chance constrained programming, Recent, advances in mathematical programming*, ed. R. Graves and P. Wolfe, Mc Graw Hill Book Co New York, 1963, 113—119.
7. Charnes, A. and Lemke, C., *Minimization of nonlinear separable convex functionals*, Nav. Res. Log. Quart. *1*, 1954, 301—302.
8. Dantzig, G., *Recent advances in linear programming*, Manag. Sci. 2, 1956, 131—144.
9. Dantzig, G., *Linear programming and extensions*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1963.
10. Dantzig, G. and Madansky, A., *On the solution of two stage linear programming under uncertainty*. Proc. Fourth Berkley Symp. on Math. Stat. and Probability, 1961, 1.
11. Dantzig, G. and Wolfe, P., *Decomposition principle for linear programs*, Oper. Res. *8*, 1960, 101—112.
12. Elmaghraby, S. E., *An approach to linear programming under uncertainty*, Oper. Res. 7, 1959, 208—216.
13. Frank, M. and Wolfe, P., *An algorithm for quadratic programming*, Nav. Res. Log. Quart 3, 1956, 95—110.
14. Freund, R. J., *The introduction of Risk into a programming model*, Econometrica *24*, 1956, 253—263.
15. Kataoka, S., *A stochastic programming model*, Econometrica, *31*, 1963, 181—196.
16. Koenig, J. W., *Produktions planung bei unsicheren Absatzmengen*, Erdöl und Kohle, *17*, 1964, 729—739.
17. Madansky, A., *Methods of solution of linear programms under uncertainty*, Oper. Res. *10*, 1962, 463—471.
18. Naslund, B., *A model of capital budgeting under risk*, Journal of Business *39*, 1966, 257—271.

19. Sengupta, J. K., Tintner, G. and Millham, C., *On some theorems of stochastic linear programming with applications*, Manag. Sci. *10*, 1963, 143—159.
20. Tintner, G., *Stochastic linear programming with applications to agricultural economics*, Second Symposium on Linear Programming, Washington D. C. National Bureau of Standards, 1957.
21. Tintner, G., *The use of stochastic linear programming in planing*, Indian Economic Review *5*, 1960, 159—167.
22. Vajda, S., *Mathematical programming*, Adison Wesley Reading Mass, 1961.
23. Weingartner, H. M., *Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems*, Prentice Hall, Inc. 1963.
24. Wolfe, P., *The simplex method for quadratic programming*, Econometrica 27, 1959, 382—398.

(Rad primljen februara 1968.)