EKONOMSKA ANALIZA,
2, XXIV (1990), 179—198

GENERALIZACIJA KONTINUIRANOG UKAMAĆIVANJA I STRATEGIJE OTPLATE DUGA*

*Drago FRANCIŠKOVIĆ***

1. UVOD

U radu se razmatraju neki osnovni pojmovi finansijske matematike. Posebno se promatra pojam kapitalizacije, tj. promjena kapitala tijekom vremena, odnosno nakon nekog vremenskog intervala. Promatra se problem otplate duga i predlaže nov način generiranja diskretnih strategija otplate. Kao matematički model kapitalizacije, a u skladu sa ekonomskom teorijom, koristi se model složene kapitalizacije (složenog ukamaćivanja). Po principu složene kapitalizacije kapitalizira se i novonastali kapital (kamata) kao i osnovni kapital (glavnica).

Dobro je poznata funkcija diskretnog složenog ukamaćivanja:

$$C(n) = C_0 r^n; \quad r = (1 + p/100), \quad C_0 = C(0), \tag{1}$$

po kojoj se računa vrijednost uloženog kapitala, odnosno vrijednost ukupnog duga i sl, nakon n godina, uz konstantnu godišnju kamatnu stopu p, kada se kapital ukamaćuje krajem svake godine (vidi [4], [6] i [8]).

Kao kapital može se promatrati bilo koja veličina, koja podliježe principu složene kapitalizacije, tj. koja se ponaša po eksponencijalnom zakonu sa nekom stopom promjene na intervalu jedinične duljine.

Kao kapital, za ilustraciju, promatrat ćemo novac posuđen ili uložen u banku uz određenu kamatnu stopu. Međutim, kao kapital možemo promatrati, npr. dug, masu drveta u šumi, broj stanovnika itd.

---

* Rad je rađen u okviru projekta "Zakon vrijednosti u funkciji upravljanja razvojem", kojeg financira SIZ znanosti SR Hrvatske.

** Studij elektrotehnike, 54000 Osijek, Istarska 3.

2. KONTINUIRANO UKAMAĆIVANJE

Prema (1) se tek na kraju godine saznaje nova vrijednost kapitala (ukupnog duga i sl.). Zbog bržeg obrtaja kapitala, dolazi do potrebe češćeg, tj. ispodgodišnjeg ukamaćivanja (vidi [6]). Podijelimo godinu na m jednakih dijelova (podintervala) (npr. za $m = 4$ to su kvartali, za $m = 12$ to su približno mjeseci) i neka se kapital ukamaćuje na kraju svakog podintervala. Označimo sa $r_m = (1 + p_m/100)$ ispodgodišnji dekurzivni kamatni faktor, gdje je p_m odgovarajuća ispodgodišnja kamatna stopa za takav podinterval.

Može se postaviti slijedeći problem:

Koliki treba biti ispodgodišnji kamatnjak p_m, ako se zahtijeva da vrijednost jediničnog kapitala, nakon jedne godine, pri ukamaćivanju nakon svakih $1/m$ dijelova godine, bude ista kao da se primjenio godišnji kamatnjak p pri ukamaćivanju na kraju godine? To je zahtijev da p_m bude ispodgodišnji kamatnjak ekvivalentan godišnjem kamatnjaku, tj. da p_m bude ispodgodišnji konformni kamatnjak.

Iz prethodnog zahtijeva slijedi da je:

$$(1 + p_m/100)^m = 1 + p/100, \tag{2}$$

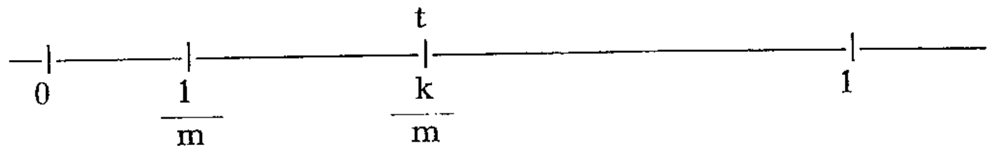
odnosno da je $r_m^m = r$ (vidi [6], str. 246).

Tada je vrijednost kapitala nakon k vremenskih intervala duljine $1/m$, odnosno nakon vremenskog intervala duljine k/m dana sa:

$$C(k/m) = C_0\, r_m^k, \tag{3}$$

odnosno prema [6] (str. 244), također je

$$C(k/m) = C_0\, r^{k/m}. \tag{4}$$



Slika 1.

Primijetimo da broj k/m također predstavlja vremenski trenutak na vremenskoj osi (vidi sliku 1).

Sada formulu (4) možemo generalizirati na slijedeći način (vidi [5]): Vrijednost kapitala nakon vremena t iznosi:

$$C(t) = C_0\, r^t, \tag{5}$$

Vrijednost t iz formule (5) možemo shvatiti tako da smo broj m (broj podintervala na koji dijelimo godinu) pustili u beskonačnost, a broj t je tada granična vrijednost kvocijenta $k(m)/m$, kada $m \to \infty$.

Funkciju $C(t)$ nazivamo funkcija *kontinuiranog ukamaćivanja.*[1] Ona predstavlja funkciju prirodnog (eksponencijalnog) rasta, sa *intenzitetom rasta* $\ln r$ (vidi [5] str. 77) i podudara se sa (1).

Korištenjem relacije (2) dobiva se:

$$C\left(\frac{k(m)}{m}\right) = C_0\left(1 + \frac{p_m}{100}\right)^{k(m)} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k(m)/m} \qquad (6)$$

Jednakost (5) se može dobiti i kao granična vrijednost, kada u (6) pustimo m u beskonačnost.

Napomena 1.

Funkcija (4) je diskretna, a (5) kontinuirana generalizacija funkcije (1). Budući da se funkcije (1), (4) i (5) podudaraju na zajedničkoj domeni reći ćemo da su međusobno ekvivalentne.

U [4] str. 2 data je nešto drugačija definicija kontinuiranog ukamaćivanja. Ona se definira kao granična vrijednost jednakosti:

$$C\left(\frac{k(m)}{m}\right) = C_0\left(1 + \frac{p}{100\,m}\right)^{k(m)}, \qquad (7)$$

(u [4] je $(k(m) = nm)$, odakle se dobiva da je

$$C(t) = C_0 \exp\left(t\frac{p}{100}\right) \qquad (8)$$

Primijetimo da se C(t) iz (8) ne podudara sa C(t) iz (1), odnosno (4) za $t \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Tj. funkcija kontinuiranog složenog ukamaćivanja (8) nije ekvivalentna funkciji diskretnog složenog ukamaćivanja iz kojeg je izvedena. Do razlike dolazi zbog primjene relativnog kamatnjaka p/m u (7), umjesto konformnog kamatnjaka p_m (vidi [5], str. 81).

Naime, ako se iz (2) p_m izrazi kao zavisna veličina od p dobiva se da je

$$p_m = p_m(p) = 100\left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1\right)$$

[1] Točnije bi bilo reći funkcija kontinuiranog *složenog* ukamaćivanja (autor je također razmatrao kontinuiranu jednostavnu i mješovitu kapitalizaciju). U autoru dostupnoj literaturi se umjesto termina kontinuirana složena upotrebljava termin kontinuirana, tako da je to i ovdje učinjeno, osim u slučaju kada se princip složene kapitalizacije želi naglasiti.

Razvije li se p_m u Taylorov red oko nule dobiva se

$$p_m = \frac{p}{m} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_m^{k}(0)}{k!} p^k,$$

odakle se vidi da je relativni kamatnjak p/m linearna (prva) aproksimacija konformnog kamatnjaka p_m.

Rješenje problema neekvivalentnosti je u primjeni konformnog kamatnjaka p_m umjesto njegove linearne aproksimacije — relativnog kamatnjaka p/m u (7) (usporedi (6) i (7)), što je ovdje i urađeno (vidi (6)).

Problem neekvivalentnosti u [4] riješen je zamjenom $p/100$ u (8) sa $ln(1 + p/100)$.

Prema (5) se uz pomoć kompjutora može izračunati vrijednost kapitala u svakom trenutku iz vremenskog intervala u kome vrijedi konstatni *dekurzivni kamatni faktor r*.

Ako se faktor r mijenja u trenucima $0 < t_i < t$; $i = 1, \ldots, k$, uz $t_0 = 0$, tada (5) prelazi u

$$C(t) = C_0 r_0^{t_1} r_1^{t_2 - t_1} \ldots r_{k-1}^{t_k - t_{k-1}} r_k^{t - t_k} = C_0 \prod_{i=0}^{k} r_i^{t_{i+1} - t_i} \tag{9}$$

gdje je r_i dekurzivni kamatni faktor koji vrijedi na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$; a r_k vrijedi na $[t_k, t]$.

Promatrajmo slučaj vremenski kontinuirano promjenljive kamatne stope, odnosno kamatnog faktora $r = r(t) = (1 + p(t)/100)$.

Neka su $0 = s_A < s_1 < \ldots < s_{k+1} = t$, takvi da se faktor r eventualno mijenja u trenucima s_i. Tada uz supstituciju $t_i = s_i$ i $r_i = r(s_i)$ u (9) i logaritmiranjem slijedi

$$ln\, C(t) = ln\, C_0 + \sum_{i=0}^{k} (s_{i+1} - s_i)\, ln\, r(s_i). \tag{10}$$

Kako je funkcija $ln\, r(t)$ monotono rastuća, prema [2] §6.3, slijedi da je dovoljno promatrati slučaj ekvidistantnih trenutaka s_i, tj. $s_{i+1} - s_i = \Delta s$. Pusti li se u (10) da $k \to \infty$, odnosno $\Delta s \to 0$, te antilogaritmiranjem graničnog izraza dobiva se

$$C(t) = C_0\, exp\left(\int_0^t ln\, r(s)\, ds\right) \tag{11}$$

U [5] jednakost (11) se naziva *opći zakon kopitalizacije*, a dobiva se kao rješenje diferencijalne jednadžbe

$$C'(t) = ln\, r(t)\, C(t),$$

koja se postulira u skladu sa ekonomskom teorijom.

Ovdje je (11) izveden iz diskretne složene kapitalizacije.

3. KONTINUIRANO PROMJENLJIVA GLAVNICA

Funkcije (5) i (9) predstavljaju vrijednost kapitala, ako je kapital uložen samo u početnom trenutku $t = 0$, u vrijednosti C_0.

Postavlja se pitanje, što ako kapital ulažemo u više navrata. Kolika je tada vrijednost ukupnog kapitala (uložen kapital uvećan za kamate), budući da se svi ulozi podvrgavaju kapitalizaciji od trenutka ulaganja? Primjenom principa financijske ekvivalentnosti kapitala, za sve uloge uložene do trenutka t, nađe se sadašnja (početna) vrijednost S, tj. svi ulozi se svedu na zajedničko dospijeće (vidi [5]), ili možemo reći projeciraju se na početni trenutak.

Primjer 1.

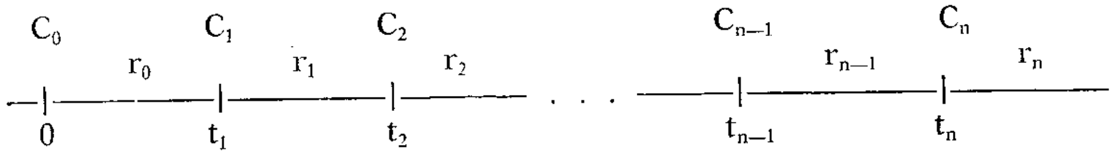
Neka su u trenucima $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n \leq t$ u banku uložene vrijednosti $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ (vidi sliku 2), tada je sadašnja vrijednost S tih uplata dana sa

$$S = \sum_{i=0}^{n} C_i r^{-t_i} = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i r^{-t_i} \tag{12}$$

ako je r konstantan godišnji dekurzivni kamatni faktor, odnosno

$$S = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i r_0^{-t_1} \dots r_{i-1}^{t_{i-1} - t_i} \tag{13}$$

ako se dekurzivni kamatni faktor mijenja pri svakoj uplati.



Slika 2.

Vrijednost ukupnog kapitala u nekom trenutku t dobije se tada iz (5), odnosno (9) ako se uzme $C_0 = S$, (tj. suma sadašnjih vrijednosti svih uloga uloženih do trenutka t).

Može se postaviti teoretska pretpostavka da se kapital ulaže kontinuirano. Tada treba odgovoriti na dva pitanja:

1. Kolika je vrijednost ukupnog kapitala u nekom trenutku?
2. Kolika je njegova sadašnja vrijednost?

To je, u stvari, pitanje trenutačne i sadašnje vrijednosti pri (kontinuiranom) ukamaćivanju vremenski kontinuirano promjenljive glavnice (kumulativna suma ulaganja). Glavnica raste, ako se radi o ulaganju (uplati), a smanjuje se ako se radi o trošku (isplati).

Uvedimo slijedeće veličine:

G(t) — *glavnica* — količina uloženog kapitala u vremenskom intervalu [0, t] (bez ukamaćivanja) (kumulativni ulozi),

K(a, b) — *kamata* — kamata dobivena u vremenskom intervalu [a, b] (kumulativna kamata),

J(t) — *iznos* — veličina ukupnog kapitala, (glavnica uvećana za kamate),

C(t) — *iznos* — veličina ukupnog kapitala uz konstantnu glavnicu $G(t) = C_0$.

Tada vrijedi:

$$J(t) = G(t) + K(0, t), \tag{14}$$

$$K(a, b) = K(0, b) - K(0, a); \quad K(t, t) = 0, \tag{15}$$

$$J(0) = C(0) = G(0) = C_0. \tag{16}$$

3.1. *Kapital se ulaže samo u početnom trenutku*

Pretpostavimo da je glavnica konstantna, tj. da vrijedi $G(t) = C_0$. Odredit ćemo veličinu promjene kamata i iznosa u nekom djeliću vremena Δt. U ovom slučaju je J(t) isto što i C(t) u (5) tj. $J(t) = C(t) = C_0 r^t$.

Tada vrijedi:

$$J(t + \Delta t) = J(t) r^{\Delta t} . \tag{17}$$

$$K(0, t) = C_0 (r^t - 1). \tag{18}$$

Korištenjem (14) i (17) dobije se

$$\frac{\Delta K (0, t)}{\Delta t} = \frac{K (0, t + \Delta t) - K (0, t)}{\Delta t} = J(t) \frac{r^{\Delta t} - 1}{\Delta t}.$$

Pusti li se da $\Delta t \to 0$, dobije se izraz za derivaciju kamata

$$K' (0, t) = \ln r\, J(t). \tag{19}$$

Integriranjem (19) i korištenjem (15) dobija se da je

$$K (a, t) = \ln r \int_a^t J (s)\, ds. \tag{20}$$

Zbog (14) imamo da je

$$J'(t) = \ln r\, J(t). \tag{21}$$

Tj. brzina kapitalizacije u trenutku t, jednaka je umnošku vrijednosti kapitala J(t) u trenutku t i brzine kapitalizacije jediničnog kapitala $ln\, r$ u tom trenutku, što je u skladu sa ekonomskom teorijom (vidi [5], str. 76). Integralna reprezentacija diferencijalne jednadžbe (21) je:

$$J(t) = J(a) + \ln r \int_a^t J(s)\, ds. \tag{22}$$

Rješenje diferencijalne jednadžbe (21) uz uvjet (16) je

$$J(t) = C_0\, r^t \tag{23}$$

što se podudara sa funkcijom C(t) iz (5) i predstavlja *zakon kontinuiranog ukamaćivanja (kapitalizacije)*, a veličina $ln\, r$ predstavlja *intenzitet rasta* (vidi [5]).

Iz zakona kapitalizacije (11) na isti način se može pokazati da (19) vrijedi i uz promjenljiv intenzitet rasta[2] $ln\, r(t)$, tj.

$$K(a, t) = \int_a^t \ln r(s)\, J(s)\, ds. \tag{24}$$

Napomena 2.

Jednakosti (20) i (24) daju vrijednost kamata dobivenih u intervalu [a, t], u ovisnosti samo od iznosa ukupnog kapitala na tom intervalu (i faktora r), bez obzira koji dio tog iznosa u nekom trenutku je od glavnice, a koji dio je od kamata, što je u skladu sa principom kontinuiranog ukamaćivanja (ukamaćuje se kamata kao i glavnica).

Veličina i promjena glavnice G (t), uz kamatni faktor r, određuje veličinu i promjenu iznosa J (t) i sadržana je u njemu. Na taj posredan način glavnica utječe na kamatu. Prema tome, može se uzeti da (19), (20) i (24) vrijedi i uz promjenljivu glavnicu!

3.2. *Kapital se ulaže kontinuirano*

Pretpostavimo da funkcija G (t) nije konstantna. Tada iz (14) i (15) slijedi:

$$K(a, t) = J(t) - J(a) - (G(t) - G(a)). \tag{25}$$

Korišćenjem jednakosti (25) u (19), dobivamo slijedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$J'(t) - \ln r\, J(t) = G'(t), \tag{26}$$

čija je integralna reprezentacija:

---

[2] U slučaju promjene godišnje kamatne stope $p = p(t)$ u trenucima $0 < t_i < t$; $i = 1, \dots k$, dekurzivni kamatni faktor $r(t) = (1 + p(t)/100)$ je stepenasta funkcija sa prekidima 1. vrste u tim trenucima.

$$J(t) = J(a) + \ln r \int_a^t J(s)\, ds + G(t) - G(a). \tag{27}$$

Rješenje od (26) uz početni uvjet $J(0) = G(0) = C_0$ je

$$J(t) = r^t \left(C_0 + \int_0^t g(s)\, r^{-s}\, ds\right), \tag{28}$$

gdje je $g(t) = G'(t)$.

Jednakost (28) predstavlja *zakon kontinuirane kapitalizacije uz kontinuirano ulaganje kapitala* (negativno ulaganje je isplata ili rashod.

Prvi član u (28) $C_0 r^t$ je rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe od (26), a drugi član

$$r^t \int_0^t g(s)\, r^{-s}\, ds$$

je njezino partikularno rješenje (vidi [3] str. 278).

Napomena 3.

Primijetimo da se u slučaju $G(t) =$ konst. jednadžbe (27) i (26) svode na (22) odnosno (21).

Napomena 4.

Relacija (17) u ovom slučaju ima oblik:

$$J(t + \Delta t) = J(t)\, r^{\Delta t} + r^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{29}$$

Napomena 5.

U slučaju vremenski promjenljive godišnje kamatne stope $p = p(t)$, odnosno promenljivog intenziteta rasta $\ln r = \ln r(t)$, rješenje jednadžbe (26) uz početni uvijet $J(0) = C_0$ je

$$J(t) = \exp\left(\int_0^t \ln r(s)\, ds\right) \left[C_0 + \int_0^t g(s) \exp\left(-\int_0^s \ln r(v)\, dv\right) ds\right],$$

što predstavlja generalizaciju općeg zakona kapitalizacije (11) u slučaju promjenljivog intenziteta rasta (promjenljive kamatne stope) i promjenljivog osnovnog kapitala (glavnice).

3.3. Uplata i isplata

Uvedimo oznake:

U (t) — *uplata* — ukupna uplata na intervalu [0, t], u (t) — *gustoća uplate* u (t) = U' (t); (nominalna strategija uplate),

O (t) — *isplata* — ukupna isplata do trenutka t,

o (t) — *gustoća isplate* o (t) = O' (t); (nominalna strategija isplate),

Q (t) — *ukamaćena isplata* O (t) uvećan za kamatu na [0, t], koja se dobija njegovim ukamaćivanjem poslije isplate, na [0, t] .

Očigledno je U (t), O (t) ≥ 0 za $t \varepsilon [0, \infty]$, a kako su one monotono rastuće, slijedi da su u (t), o (t) ≥ 0 za $t \varepsilon [0, \infty]$.

Promjenljiva glavnica $G(t)$ je, u stvari, razlika između uplate i isplate, tj.

$$G(t) = U(t) - O(t). \tag{30}$$

Moguće je, dakle, da glavnica poprimi i negativnu vrijednost (kada je ukupna isplata veća od ukupne uplate).

Ako se samo uplaćuje, iz (30) i (28) imamo:

$$J(t) = r^t [C_0 + \int_0^t u(s) r^{-s} ds], \tag{31}$$

što predstavlja *zakon kontinuirane uplate (kontinuiranog ulaganja)*.

Ako imamo samo isplatu, iz (30) i (28) slijedi:

$$J(t) = r^t [C_0 - \int_0^t o(t) r^{-s} ds], \tag{32}$$

što predstavlja *zakon kontinuirane isplate*.

Između uplate i isplate s računske točke gledišta, razlika je samo u predznaku. Uplata je negativna isplata i obratno.

4. SADAŠNJA VRIJEDNOST

Sadašnja ili početna vrijednost *S* ukupnog iznosa kada se ulaže (isplaćuje) u više navrata dana je sa (12), odnosno (13). Može se postaviti pitanje nalaženja početne vrijednosti ukupnog iznosa i glavnice u svakom trenutku t u slučaju kontinuirano promjenljive glavnice.

Pri kontinuiranoj promjeni glavnice nije uputno upotrebljavati termin sadašnje, a naročito početne vrijednosti, jer u tom slučaju, početna (sadašnja) vrijednost nije isto što i vrijednost u početnom trenutku, pa su mogući nesporazumi. Npr., vidi se da je (33) početna vrijednost od J (t) općenito različita od vrijednosti J (t) u početnom trenutku, tj. od C_0. Zato se može preporučiti da se umjesto termina početna vrijednost koristi termin projekcija vrijednosti na početni (sadašnji) trenutak.

Imamo slijedeću definiciju sadašnje vrijednosti:

Definicija 1.

Reći ćemo da je $S(f, t)$ sadašnja[3] vrijednost veličine $f(t)$, ako je $f(t) = r^t S(f, t)$.[4]

Reći ćemo da je $S(f, a, t)$ projekcija vrijednosti veličine $f(t)$ na trenutak a, ako je $f(t) = r^{t-a} S(f, a, t)$, odnosno $S(f, a, t) = r^{a-t} f(t)$.

$S(f, a, t)$ se kraće naziva *projekcija* od $f(t)$ na trenutak a.

Ova definicija u potpunosti se slaže sa ranijom definicijom sadašnje vrijednosti (vidi [4], [6] i [8]) i njezina je generalizacija. Iz Definicije 1. i (28) slijedi da je sadašnja vrjednost ukupnog iznosa (ukupnog duga) dana sa:

$$S(J, t) = C_0 + \int_0^t g(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{33}$$

Analogno se može pokazati da je

$$S(J, a, t) = J(a) + \int_a^t g(s)\, r^{a-s}\, ds. \tag{34}$$

Napomena 6.

Prethodna definicija je dobra za veličine koje nastaju ukamaćivanjem (npr. $J(t)$, $Q(t)$). Sadašnju vrijednost veličina koje su invarijantne na ukamaćivanje (npr. $G(t)$, $U(t)$, $O(t)$) možemo definirati kao sadašnju vrijednost veličina koje nastaju njihovim kontinuiranim ukamaćivanjem.

Prema tome, sadašnja vrijednost glavnice je:

$$S(G, t) = C_0 + \int_0^t g(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{35}$$

5. KONTINUIRANA OTPLATA ZAJMA

U praksi su pri otplati zajma većinom u upotrebi strategije otplate nominalno jednakim anuitetima, u približno jednakim[5] vremenskim razmacima. Upotrebljava se pravo šarenilo nekorektnih metoda izračunavanja anuiteta (vidi [6]), unatoč postojanju i korektnih[6] metoda

[3] Iz povijestnih razloga govorimo i nadalje o sadašnjoj vrijednosti, ali pod tim pojmom podrazumijevamo projekciju vrijednosti na početni trenutak $t = 0$.

[4] Tj. to je ona konstantna vrijednost koja pri kontinuiranom ukamaćivanju na $[0, t]$ daje $f(t)$ kao ukupan iznos.

[5] Npr. ako se anuiteti otplaćuju svakog prvog u mjesecu, budući da svi mjeseci nemaju jednak broj dana, vremenski razmaci otplate se mogu razlikovati i do 3 dana, što u uvjetima visoke inflacije kod kratkoročnih zajmova, ovisno o strategiji, ne mora biti zanemarivo.

[6] Do sada poznate korektne metode podrazumevaju otplatu anuiteta u jednakim vremenskim razmacima, a u praksi se anuiteti otplaćuju u približno jednakim razmacima.

(vidi [4], [6]). Nekorektnost je posljedica nekorektne primijene principa složenog ukamaćivanja i najčešće se radi o nekorektnom ispodgodišnjem ukamaćivanju.

Nekorektne metode, najčešće nastale kombiniranjem složenog i jednostavnog ukamaćivanja, u sebi kriju mogućnost manipulacije ([6], str. 252) i u pravilu čine grešku u korist davaoca zajma.

Moguća je i strategija otplate varijabilnim anuitetima. Korektno izračunavanje varijabilnih anuiteta za nekoliko osnovnih strategija (npr. anuiteti rastu po aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji) razrađeno je u [4], [7] i [8]. Do sada poznate korektne metode podrazumjevaju konstantnu kamatnu stopu p, sa otplatom u jednakim vremenskim razmacima, što u praksi nije slučaj, i time su praktično neupotrebljive. Kontinuirana otplata je njihova generalizacija i primijenom strategija određenog tipa taj problem se prevladava.

5.1. Otplata zajma

Promatrat ćemo proces kontinuiranog otplaćivanja zajma[7] u slučaju konstantne kamatne stope.[8] Ako je J (t) iznos ukupnog duga, onda je $O(t)$ ukupna otplata, a $U(t)$ bi bilo ,zaduženje'. Uz konstantan $U(t) = C_0$ (zadužimo se samo u početnom trenutku), (32) predstavlja *zakon kontinuirane otplate.*

Bez gubitka općenitosti, možemo uzeti da je $O(0) = 0$, (u protivnom se uzme da je $U(0) = C_0 - O(0)$). Slijedi da je ukupna otplata dana sa:

$$O(t) = \int_0^t o(s)\, ds. \tag{36}$$

Ako bi otplatu O (t) ukamaćivali nezavisno, tada bi ukamaćena otplata Q (t) prema (26) bila rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$Q'(t) - \ln r\, Q(t) = O'(t). \tag{37}$$

uz početni uvjet $Q(0) = O(0) = 0$, tj.

$$Q(t) = r^t \int_0^t o(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{38}$$

Prema Napomeni 6. slijedi da je

$$S(Q, t) = S(Q, t) = \int_0^t o(t)\, r^{-s}\, ds. \tag{39}$$

Iz (28) i (30) slijedi:

$$J(t) = C(t) - Q(t). \tag{40}$$

---

7 U slučaju diskretne otplate, slijedeći integrali se mogu zamjeniti sumom po trenucima s u kojima se otplaćuje anuitet.

8 Slučaj promjenljive kamatne stope razmatra se u [1].

Napomena 7.

Nigdje nije rečeno kakva je funkcija O (t). Ona je proizvoljna i ovisi o strategiji otplate. Gustoću distribucije otplate o (t) zvat ćemo *strategija nominalne otplate duga* ili kraće *nominalna strategija.*

Za ilustraciju, u slijedećem primjeru dani su iznosi ukupnog duga J (t) za nekoliko različitih jednoparametarskih nominalnih strategija otplate (vidi (32)).

Primjer 2.

U tablici 1. dani su iznosi ukupne otplate O (t) do trenutka t i iznosi ukupnog duga J (t) u trenutku t, u ovisnosti od slijedećih strategija:

a) otplata duga je konstantna,
b) otplata duga raste linearno,
c) otplata duga raste eksponencijalno sa bazom r,
d) otplata duga raste eksponencijalno sa bazom $q \neq r$.

	$o(t)$	$O(t)$	$J(t)$
a	A	$A\,t$	$C_0\,r^t - \dfrac{A}{\ln r}(r^t - 1)$
b	$B\,t$	$1/2\,B\,t^2$	$C_0\,r^t - \dfrac{B}{\ln^2 r}(r^t - t\ln r - 1)$
c	$D\,r^t$	$\dfrac{D}{\ln r}(r^t - 1)$	$C_0\,r^t - D\,t\,r^t$
d	$E\,q^t$	$\dfrac{E}{\ln q}(q^t - 1)$	$C_0\,r^t - E\,\dfrac{q^t - r^t}{\ln q - \ln r}$

Tablica 1.

Strategije u prethodnom primjeru imaju po jednu neodređenu konstantu. Općenito može ih biti i više. Slobodne konstante iz strategije o (t) možemo uzeti proizvoljno ili ih odrediti iz dodatnih uvjeta — uvjeta na strategiju, o čemu će biti riječi poslije.

Napomena 8.

Ako je strategija o (t) kombinacija strategija iz prethodnog primjera, primjenom principa superpozicije (za diferencijalne jednadžbe), ukupan iznos J (t) je suma $C_0\,r^t$ (rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe) i odgovarajućih partikularnih rješenja iz primjera (vidi tekst iza (28)).

Zakon kontinuirane otplate se može primijeniti i u slijedećem slučaju:

Promatra li se od nekog početnog trenutka $t = 0$ proces kontinuirane sječe šume. Sa C_0 označimo količinu drvene mase u početnom trenutku, a sa r indeks porasta jedinične mase u jedinici vremena. Neka je J (t) količina drvene mase u šumi u trenutku t, a O (t) količina drvene mase posječenih stabala do tog trenutka. Tada vrijedi (32) i može se nazvati *zakon kontinuirane sječe šume*, tj. pojam otplate se zamjenjuje pojmom sječe. Q (t) tada predstavlja moguću količinu drvene mase posječenih stabala, u slučaju da nisu bila posječena.

Strategija sječe šume, može npr. ovisiti o raspoloživim tehničkim sredstvima i radnicima ili npr. o kretanju cijene drveta na tržštu. Strategija otplate zajma može ovisiti npr. o sposobnosti otplaćivanja zajma tražioca zajma.

Uvjet na strategiju sječe je najčešće takav da sječa traje neograničeno dugo, a uvjet na strategiju otplate duga je najčešće takav da se dug vrati u konačnom vremenu.

5.2. *Otplata u konačnom vremenu*

Promatrajmo sada proces kontinuirane otplate, sa ciljem da se dug vrati u trenutku $t = T$, tj. da je

$$J(T) = 0. \tag{41}$$

Odatle i iz (32) dobiva se *uvjet otplate* duga u trenutku $t = T$:

$$\int_0^T o(s)\, r^{-s}\, ds = C_0. \tag{42}$$

Odnosno, prema (39) vrijedi:

$$S(Q,T) = C_0.$$

Tj. uvjet otplate duga u nekom trenutku T kaže da je sadašnja vrijednost ukupne otplate u tom trenutku S (Q, T) jednaka sadašnjoj vrijednosti zaduženja u istom trenutku ($C_0 = S(U, T)$).

Uvijet otplate (42) je uvjet na strategiju o (t) i pomoću nje se u primjeru 2. mogu odrediti slobodne konstante A, B, D i E (vidi tablicu 2).

A	B	D	E
$C_0 r^T \frac{\ln r}{r^T - 1}$	$C_0 r^T \frac{\ln^2 r}{r^T - T \ln r - 1}$	$\frac{C_0}{T}$	$C_0 r^T \frac{\ln q - \ln r}{q^T - r^T}$

Tablica 2.

Neka je za otplatu zajma uzetog u trenutku $t = 0$, zadana jednoparametarska nominalna strategija otplate $o(t)$. Iz uvjeta otplate tada treba odrediti neodređeni parametar. Za to je potrebno riješiti integral u (42), a za što je potrebno znati faktor r na intervalu $[0, T]$, tj. u budućim trenucima.

U slučaju kada nije unaprijed moguće znati godišnju kamatnu stopu, kao što je slučaj u praksi, nemoguće je odrediti nepoznati parametar, odnosno nominalnu strategiju. Jedan od načina da se to prevlada je da se za r na $[0, T]$ uzme onaj u sadašnjem trenutku ili da se načini njegova procjena u budućnosti. Međutim, time se očito čini pogreška i tako određena strategija je nekoretkna. Njezinom primjenom početna vrijednost otplate bila bi različita od vrijednosti uzetog zajma, i to u slučaju nepredvidivog porasta godišnje kamatne stope na štetu davaoca zajma. Time davaoc zajma gubi na realnoj vrijednosti kapitala.

Lijek u tom slučaju je uvođenje strategije koja će biti invarijantna na promjenu kamatne stope. To je strategija koja bi se primijenjivala u slučaju da je godišnja kamatna stopa $p = 0$, odnosno faktor $r = 1$. Ta strategija naziva se *realna strategija otplate duga* ili krće *realna strategija* i označimo je sa $\varphi(t)$. Nominalna strategija je tada revalorizacija realne strategije tj.

$$o(t) = \varphi(t)\, r^t.$$

Iz prethodne jednakosti i (39) dobiva se da je realna strategija gustoća distribucije sadašnje vrijednosti otplate, tj.

$$\varphi(t) = S'(Q, t),$$

odnosno

$$S(Q, t) = \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

Primjenom realne strategije prethodni integrali poprimaju jednostavniji oblik i ako je funkcija $\varphi(t)$ prikladno odabrana mogu se egzaktno riješiti.

6. DISKRETNA OTPLATA ZAJMA

Kontinuirana otplata je kontinuirani proces i kao model nije pogodan pri radu sa novcem u praksi, jer su uplata i isplata diskretni procesi, tj. dešavaju se u diskretnim vremenskim trenucima.

U praksi se najčešće koristi model (strategija) otplate jednakim anuitetima u približno jednakim vremenskim razmacima.

Postoji niz nekorektnih metoda za izračunavanje anuiteta, koje su nekorektne zbog nepoštivanja principa složenog ukamaćivanja (vidi [8]). U [4], [6] i [8] na korektan način se izvodi formula za vrijednost anuiteta R, pri otplati zajma u k jednakih anuiteta u jednakim vremenskim razmacima:

$$R = C_0\, r^{k/m} \frac{r^{1/m} - 1}{r^{k/m} - 1}, \tag{43}$$

gdje je m broj podintervala iste duljine na koje dijelimo godinu.

Pri visokoj inflaciji, strategija nominalno jednakih anuiteta dovodi do toga da je prvi anuitet strahovito velik, tako da ga malo tko može otplatiti, a zadnji realno dosta malen. Bilo bi realnije da anuiteti nisu jednaki, nego da na neki način prate inflaciju ili da odgovaraju platežnoj sposobnosti tražioca zajma tokom vremena vraćanja. U [5], [7] i [8] dato je nekoliko metoda određivanja varijabilnih anuiteta na korektan način.

U dosadašnjoj literaturi, u planu otplate (otplatnoj osnovi) svaki anuitet se u pravilu dijeli na otplatnu kvotu i preostali dio koji otplaćuje kamate. To nije neophodno, jer pitanje podijele anuiteta na otplatnu kvotu i kamatni dio, u slučaju složenog (kontinuiranog) ukamaćivanja, je stvar ukusa i pristupa problemu otplate.

U većini literature također se zahtijeva da prvi od varijabilnih anuiteta bude veći od kamata do trenutka prve otplate. Taj uvjet je posljedica uvjeta otplate duga u konačnom vremenu u strategiji nominalno jednakih anuiteta. U slučaju varijabilnih anuiteta to nije nužan uvjet.

Može se postaviti slijedeće pitanje:

Koliki mora biti anuitet $R_a(b)$, otplaćen u trenutku b, da bi ukupan dug u tom trenutku po otplati anuiteta, bio kao da smo dug otplaćivali kontinuirano sa strategijom otplate o(t) na intervalu [a, b]?

Iz (39) i činjenice da sadašnje vrijednosti obiju veličina moraju biti jednake slijedi da je:

$$R_a(b) = r^b\,(S(Q, b) - S\,(Q, a)) = r^b \int_a^b (o(s)\, r^{-s}\, ds. \tag{44}$$

Anuitet $R_a(b)$ predstavlja *diskretni ekvivalent kontinuirane otplate* na intervalu [a, b].

Neka se u proizvoljnim trenucima $t_1, t_2, \ldots t_n$ otplaćuju anuiteti R_i, $i = 1, \ldots, n$. Za zadanu kontinuiranu strategiju o(t), prema (44) mogu se odrediti anuiteta R_i kao diskretni ekvivalent kontinuirane otplate na intervalu $[t_{i-1}, t_i]$, tj. vrijedi:

$$R_i = r^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} o(s)\, r^{-s}\, ds; \; i = 1, \ldots, n, \tag{45}$$

gdje je $t_0 = 0$ trenutak uzimanja zajma.

Do istog rezultata može se doći i polazeći od jednakosti (29) u Napomeni 4, ne pozivajući se na sadašnju vrijednost. Ovo je jedan način generiranja diskretnih strategija otplate u proizvoljnim trenucima, na osnovu kontinuirane strategije o(t). Na primjer, strategija o(t) može opisivati distribuciju sposobnosti otplaćivanja zajma tražioca zajma. Izbor odgovarajuće diskkretne strategije varijabilnih anuiteta, a u skladu sa zahtijevima banke, može se prepustiti tražiocu zajma, čime mu se izlazi u susret.

Uvjet otplate ukupnog duga u trenutku $t_n = T$ je u stvari uvjet na strategiju o(t).

Primjer 3.

Poslovan čovjek u trenutku $t_0 = 0$ uzima zajam na T godina uz godišnju kamatnu stopu p ($r = 1 + p/100$). Dug treba vratiti u n anuiteta u proizvoljnim, ali unaprijed danim trenucima $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Zajam se ulaže u posao koji će donijeti određenu dobit. Očekuje se da će distribucija (raspodjela) dobiti, tokom otplate zajma, imati funkciju gustoće $K q^t$ ($r \neq q > 1$). Kako bi opterećenje otplate na dobit bilo relativno jednoliko, za strategiju kontinuirane otplate odaberemo funkciju koja se ponaša kao i funkcija gustoće distribucije dobiti (otplata prati rast dobiti). Postavlja se pitanje nalaženja anuiteta čija će distribucija u tom smislu odgovarati očekivanoj distribuciji dobiti. Odaberimo strategiju kontinuirane otplate $o(t) = E q^t$, sa neodređenim parametrom E (vidi Primjer 2.d).

Iz uvjeta otplate (42) u trenutku T, i (45) dobije se da je i-ti anuitet

$$R_i = C_0 \; r^T q^{t_{i-1}} \frac{q^{t_i - t_{i-1}} - r^{t_i - t_{i-1}}}{q^T - r^T}. \tag{46}$$

U slučaju ekvidistantnih trenutaka otplate ($t_i - t_{i-1} =$ const.)

$$R_i = b\, a^{i-1}, \tag{47}$$

gdje je

$$a = q^{T/n}; \quad b = C_0 \, r^T \frac{q^{T/n} - r^{T/n}}{q^T - r^T},$$

tj. anuiteti rastu po geometrijskoj progresiji (vidi [8], str. 148).

U slučaju g = r

$$R_i = C_0 r^{t_i} \frac{t_i - t_{i-1}}{T}$$

Primjer 4.

U trenutku $t_0 = 0$, uzet je zajam od 1,000.000 dinara, na 1/2 godine (1 godina = 365 dana) uz konstantnu godišnju kamatnu stopu p = 850% (r = 9,5), koji treba otplatiti sa 6 anuiteta u jednakim vremenskim razmacima, $t_i = i/12$ (godina). Nađimo anuitete koristeći kontinuiranu strategiju otplate $o(t) = E\,q^t$, za q = 5. Iz (47) dobiju se anuiteti:

$R_1 = 228\,870$	(232.364)
$R_2 = 261\,720$	(266.399)
$R_3 = 299\,284$	(294.006)
$R_4 = 342\,241$	(348.616)
$R_5 = 391\,362$	(384.743)
$R_6 = 447\,534$	(456.204)

U slučaju da se dobiveni anuiteti ne otplaćuju u jednakim vremenskim razmacima nego svakog prvog u mjesecu, tj. u približno jednakim razmacima njima se otplati 99.3718% zajma. Odnosno suma sadašnjih vrijednosti anuiteta je za 6.282 dinara manja od uzetog zajma.

Vrijednosti u zagradama predstavljaju korektne vrijednosti anuiteta u slučaju otplate svakog prvog u mjesecu.

Primjer 5.

Promatrajmo prethodni primjer u slučaju da je zajam uzet 01. 07. 89. i da ga treba otplatiti sa 4 anuiteta u različitim vremenskim razmacima. Neka se prvi anuitet otplaćuje 01. 09. 89, drugi 25. 10. 89, treći 01. 12. 89. i četvrti 01. 01. 90. Tada je $t_1 = 62/365$, $t_2 = 116/365$, $t_3 = 153/365$, $t_4 = 184/365$.

Prema (46) dobije se slijedeći plan otplate.

Plan otplate

datum otplate	anuitet	ostatak duga
01. 07. 89.	0	1 000 000
01. 09. 89.	547 724	918 091
25. 10. 89.	600 988	679 971
01. 12. 89.	477 475	376 808
01. 01. 90.	456 205	0

U slučaju promjenljive kamatne stope, neotplaćeni anuiteti se mogu revalorizirati pri svakoj promjeni kamatne stope.

Primjer 6.

Dana 10. 01. 1989. uzet je zajam od 1,000.000 dinara, koji treba otplatiti sa 4 anuiteta, tako da se svakim anuitetom otplati jedna četvrtina sadašnje vrijednosti zajma. Anuitete neotplaćene do trenutka promjene kamatne stope treba revalorizirati. Anuiteti će se otplatiti u dane: 01. 03. 89, 01. 04. 89, 05. 05. 89. i 01. 06. 89. Godišnja kamatna stopa p mijenja se svakog prvog u mjesecu, kako je prikazano u tablici 3.

U tablici 4 dati su nominalni iznosi anuiteta u trenutku uzimanja zajma i njihovi revalorizirani iznosi, pri svakoj promjeni godišnje kamatne stope.

mjesec	1.	2.	3.	4.	5.
p (%)	347	504	916	689	1477

Tablica 3.

dan izračunavanja anuiteta	a n u i t e t i			
	R_1	R_2	R_3	R_4
10. 01. 89.	306 919	348 542	400 711	447 648
01. 02. 89.	314 088 *	365 920	432 654	494 215
01. 03. 89.	314 088	382 445 *	474 637	563 435
01. 04. 89.	314 088	382 445	463 588	540 121
01. 05. 89.	314 088	382 445	467 120 *	572 842 *

Tablica 4.

Vrijednosti označene zvijezdicom su nominalne vrijednosti anuiteta koji se otplaćuje u unaprijed određene dane.

7. ZAKLJUČAK

Generalizacija općeg zakona kapitalizacije u slučaju promjenljive glavnice i promjenljive kamatne stope opisuje odnose između ukupnog iznosa kapitala, glavnice kao osnovnog kapitala i intenziteta rasta, odnosno kamatne stope. Također nam omogućava promatranje procesa kontinuirane otplate.

Sa kontinuirane otplate, koristeći disketni ekvivalent, može se prijeći na potpuno korektnu diskretnu otplatu varijabilnim anuitetima u proizvoljnim trenucima. Anuiteti se mogu izračunavati korištenjem odgovarajućeg softwarea.[9] To je potpuno nov način generiranja

[9] Izračunavanja u primjerima obavljena su na IBM — kompatibilnom personalnom računaru na bazi vlastitog softwarea.

diskretnih strategija otplate na osnovu proizvoljnih kontinuiranih strategija. Na taj način moguće je naći diskretnu strategiju otplate koja omogućava korektnu otplatu duga prilagođenu očekivanoj platežnoj sposobnosti tražioca zajma.

U slučaju promjenljive kamatne stope p također je moguće, koristeći realnu strategiju, na korektan način izračunavati i revalorizirati anuitete u skladu sa odabranom strategijom.

Primljeno: 28. 06. 1989.
Prihvaćeno: 14. 11. 1990.

LITERATURA

[1] D. Franciškovič, *Continuous capitalization and debt management*, VII Conference on Applied Mathematics, Osijek 1989. Sept. 13—15. Studij elektrotehnike i Ekonomski fakultet, Osijek 1990.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza I — Diferenciranje i integriranje*, Tehnička knjiga, Zagreb 1980.

[3] S. Kurepa, *Matematička analiza II — Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb 1980.

[4] Lj. Martić, *Kvantitativne metode za financijske i računovodstvene analize*, Informator, Zagreb 1980.

[5] V. Muškardin, *Suvremeni pristup financijskoj matematici*, Ekonomska analiza, No. 1 Vol. 19, 1985, pp. 75—99.

[6] R. Scitovski, *Ispodgodišnje ukamaćivanje*, Ekonomska analiza, No. 2 Vol. 21, 1987, pp. 243—257.

[7] M. Šilac, *Otplata zajma varijabilnim anuitetima*, Ekonomska analiza, No. 2 Vol. 23, 1989, pp. 185—197.

[8] B. Trklja, *Finansijska matematika*, Savremena administracija, Beograd 1985.

GENERALIZATION OF CONTINUOUS CAPITALIZATION AND STRATEGY OF REPAYMENT

Drago FRANCIŠKOVIĆ

Summary

Using the principle of continuous capitalization the general law of capitalization is derived when original capital is time changeable. In particular, continuous debt management is considered. The idea of nominal and real strategy of repayment is introduced. Also, the condition of repayment in definitive time if given.

This paper defines the discrete equivalent of continuous repayment, by which the discrete debt management is possible.

In the case of changeable rate of interest, using the real strategy of repayment, it is possible to ensure the correct computation and revalorization of annuities.