

PRIMENA TRANZITIVNIH MATRICA U PREDVIĐANJU PORASTA DRUŠTVENOG PROIZVODA JUGOSLAVIJE

Milan ŽIVKOVIĆ)*

Klasičan način predviđanja budućih kretanja društvenog proizvoda putem ekstrapolacije trendova ima kako pozitivnih tako i negativnih strana. Jedan od nedostataka metoda ekstrapolacije ispoljava se u jednoj vrsti determinizma, koji se, bez obzira što se metoda služi statističkim instrumentarijem, javlja u krajnjim rezultatima. Obično se, na primer, kaže da će pojava čije buduće kretanje ispitujemo i predviđamo, posle izvesnog broja godina, imati takve i takve kvantitativne karakteristike. Pri tome se služimo raznim procenama, iskustvom, analizom statističkih podataka o kretanju pojave u prošlosti i drugim sredstvima. Kada nakon mukotrpnog posla dobijemo određene prognoze mi sa njima dalje operišemo kao sa čvrstim veličinama, bez obzira na neizvesnost koju sa sobom nose buduća kretanja. Metod ekstrapolacije ne pruža skoro nikakve informacije o toj neizvesnosti. Mi ćemo ovde izložiti jedan nov pristup problematici predviđanja, koji dopušta ne samo efektivno dobijanje odgovarajućih prognoza nego i određenu meru njihove pouzdanosti odnosno neizvesnosti koja ih prati. Metod je baziran na stohastičkim procesima Markovljevog tipa i može se primeniti na svaku vrstu predviđanja za koju je moguće obezbediti odgovarajuće informacije.

U drugom delu ovog rada razmatraćemo buduća kretanja društvenog proizvoda Jugoslavije do 1987. godine primenjujući pomenuti metodološki postupak.

1. PROMENE DRUŠTVENOG PROIZVODA KAO STOHAŠTIČKI PROCES

U svakodnevnom govoru često se upotrebljava reč »proces«, pri čemu se pod tim pojmom podrazumevaju različite stvari. Za potrebe naših razmatranja biće dovoljno ako proces shvatimo kao jedan kompleks, na neki način međusobno povezanih događaja, koji imaju svoju istoriju, svoju sadašnjost i budućnost. Svaki događaj u kompleksu ima svoj razvoj, diskretan ili kontinuiran. S druge strane, zbog međusobne

*) Autor je asistent u Institutu ekonomskih nauka u Beogradu.

interakcije i uslovljenosti, događaji, u svakom periodu vremena, konstituišu jedno stanje procesa u celini. Stanje procesa u svakom trenutku vremena zavisi od mnogo faktora. Ako raspolažemo sa dovoljno informacija možemo detaljno da opišemo istoriju procesa, tj. njegovo stanje u svakom od prošlih perioda vremena. Poslednji od njih je naročito značajan.

Za buduća stanja procesa, koja želimo da predvidimo i opišemo, nije dovoljno da poznamo samo pređašnji razvoj, već je potrebno čitavo mnoštvo dodatnih informacija. Da bi se nešto određenije moglo da kaže o budućim stanjima procesa neophodno je istražiti mnogobrojne faktore od kojih ta stanja zavise. No, u većini slučajeva, nije poznato koji će faktori i u kojoj meri uticati na proces u budućnosti. Otuda se javlja problem neizvesnosti o budućim stanjima procesa, a funkcionalne veze između budućih stanja i faktora koji na njih utiču imaju stohastičku prirodu. Ovakvi procesi se nazivaju stohastički. U poslednjoj deceniji došlo je do burnog razvoja teorije stohastičkih procesa. Ona se bavi klasifikacijom procesa i istraživanjem pomenutih funkcionalnih veza između budućih stanja i faktora koji ih determinišu. Kod svih stohastičkih procesa promene stanja se izražavaju odgovarajućim verovatnoćama. Prethodno se izvrši numeracija svih stanja u kojima proces može da se nađe i odredi se period vremena potrebnog za prelaz iz jednog stanja u drugo. Zatim se pristupa određivanju verovatnoće p_{ij} da će proces iz stanja i preći u stanje j , ($i, j = 1, 2, \dots, N$, ako postoji ukupno N stanja). Verovatnoće p_{ij} formiraju tranzitivnu matricu pomoću koje se analiziraju buduća stanja procesa.

Posebno značajnu klasu stohastičkih procesa čine tzv. Markovski procesi. Osnovna pretpostavka na kojoj se zasniva teorija ovih procesa jeste da verovatnoća p_{ij} prelaza procesa iz stanja i u stanje j ne zavisi od istorije razvoja procesa pre dolaska u stanje i . Ova verovatnoća zavisi samo od stanja i u kome se proces nalazi u posmatranom periodu vremena i od stanja j u koje proces treba da pređe po isteku pomenutog perioda.

Teško je naći procese u realnom svetu pogotovu u ekonomiji i privredi koji su čisti Markovski procesi u smislu njihove osnovne karakteristike pomenute napred. Međutim, ima dosta procesa koji se ipak mogu smatrati Markovskim. Ako je kod nekih realnih procesa uticaj poslednjeg poznatog stanja dominantan i ako istorija njihovog razvoja veoma malo utiče na buduća stanja, tada se može pretpostaviti da se ovi procesi ponašaju približno isto kao i Markovski procesi.

U našoj analizi kretanja društvenog proizvoda Jugoslavije poći ćemo od pretpostavke da je ono rezultat realizacije jednog Markovskog procesa. Razlozi koji ovu pretpostavku čine plauzibilnom su sledeći:

1. Budući nivoi društvenog proizvoda Jugoslavije u velikoj meri zavise od sadašnjeg nivoa. Oni veoma malo ili skoro ni malo ne zavise od toga na kojim nivoima je društveni proizvod bio u proteklim godinama. Istorija razvoja društvenog proizvoda je, sukcesivno — godinu za

godinom, uslovlila sadašnji nivo, ali budući nivoi u najvećoj meri zavise od sadašnjeg.

2. Budući nivoi društvenog proizvoda zavise, između ostalog, i od investicionih ulaganja ranijih godina. Period aktivizacije ovih investicija može da se poklopi sa nekim periodom u budućnosti. Međutim, informacije o ovim ulaganjima mogu da nam posluže jedino za određivanje verovatnoća prelaza društvenog proizvoda sa jednog nivoa na drugi. Dakle, verovatnoće zavise od veličine ulaganja ali ne i od nivoa društvenog proizvoda u prošlosti.

3. Ostali faktori koji utiču na kretanje društvenog proizvoda u budućnosti nisu značajni sa stanovišta zavisnosti verovatnoća p_{ij} od nivoa na kojima se društveni proizvod nalazio u prošlosti.

Prema tome, kretanje društvenog proizvoda se može shvatiti kao Markovski proces u kome se nivoi društvenog proizvoda u pojedinim godinama definišu kao stanja procesa, period vremena od jedne godine — kao vreme prelaza iz jednog stanja u drugo, a p_{ij} predstavlja verovatnoću prelaza društvenog proizvoda sa nivoa i na nivo j nakon isteka jedne godine.

Pretpostavimo sada da treba izvršiti predviđanje kretanja društvenog proizvoda Jugoslavije za period od narednih N godina. Pre svega se moramo dogovoriti o baznoj godini. Neka je to, recimo 1968. Dalju analizu izvodimo na sledeći način:

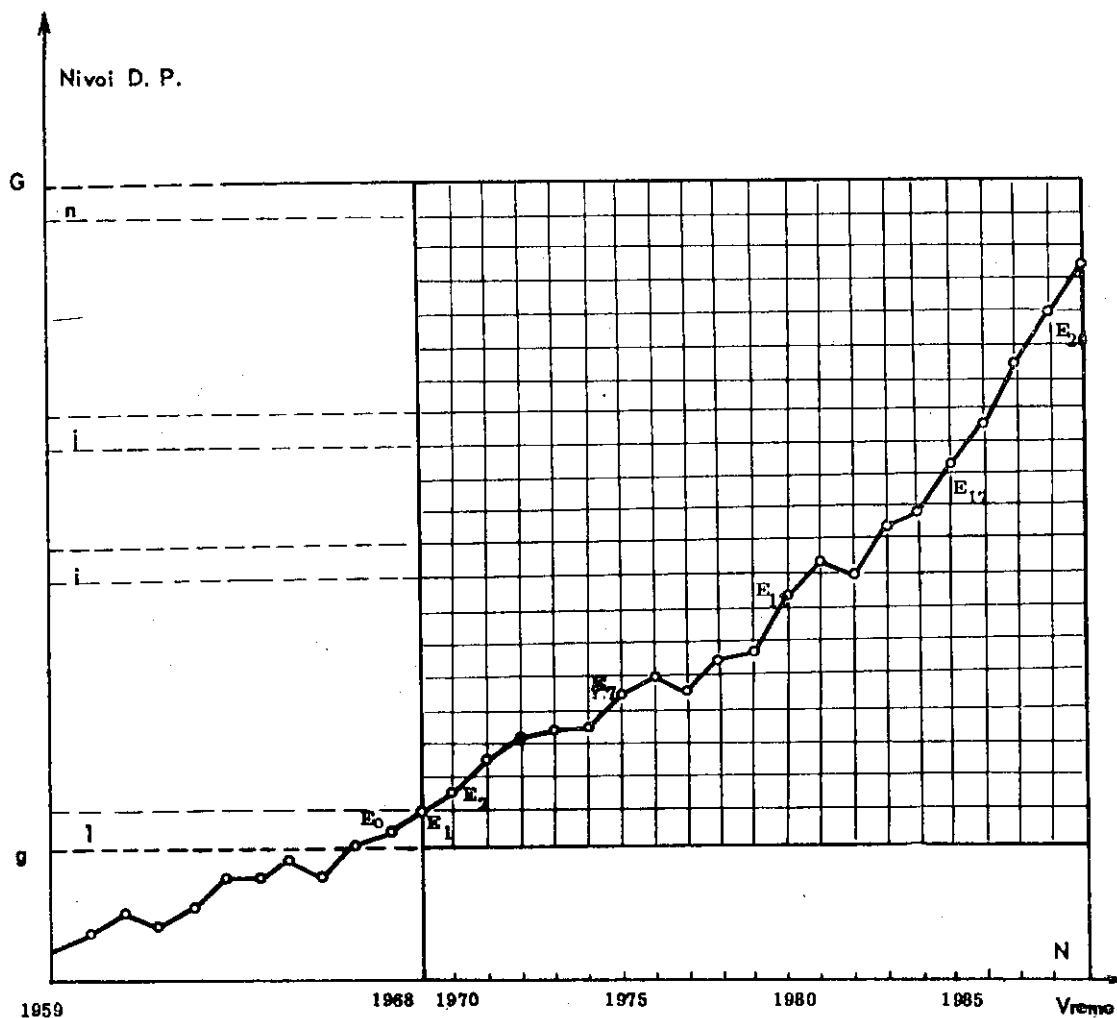
1. Za naredni period od N godina potrebno je ustanoviti donju granicu g ispod koje društveni proizvod neće pasti ni u jednoj godini. Ta granica treba da se odredi na osnovu posebnih istraživanja ili prosto pretpostavljajući da ona neće biti niža od nivoa društvenog proizvoda u nekoj od bliskih godina u prošlosti. Analiza odgovarajućih vremenskih serija o kretanju društvenog proizvoda bi bez sumnje pružila veoma važne informacije za utvrđivanje granice g .

2. Posebnim istraživanjima treba ustanoviti i gornju granicu G iznad koje društveni proizvod neće ići ni u jednoj od narednih N godina. Ovu granicu treba utvrditi što pouzdanije, pri čemu, naravno, ona ne treba da bude nerealno visoko ocenjena. Visoka granica G smanjuje verovatnoću njenog prekoračenja i sa tog stanovišta bi se moglo zahtevati da ona bude što veća. Međutim, ona bi mogla biti tako visoko ocenjena da više ne pruža upotrebljive informacije. Otuda je neophodno da se granica G što pažljivije odredi.

Razmak $R = [g, G]$ ćemo zvati razmakom poverenja. On ima osobinu da društveni proizvod u bilo kojoj od narednih godina neće preći njegove granice. Prema tome, verovatnoća da će se društveni proizvod u svakoj narednoj godini naći između g i G je jednaka jedinici.

3. Sledeći korak se sastoji u tome da se razmak poverenja R podeli na n intervala (ne obavezno jednakih). Svaki takav interval ćemo zvati nivoom društvenog proizvoda i , pri čemu je $i = 1, 2, \dots, n$, gde sa 1 označavamo najniži nivo, sa 2 sledeći viši nivo itd., sa n najviši nivo društvenog proizvoda.

Kretanje društvenog proizvoda u prošlosti i zona budućih kretanja



Sl. 1.

4. Ako je društveni proizvod na kraju jedne godine na nivou i , moguće je da se na kraju naredne godine nađe na istom nivou ili da pređe na neki viši ili niži nivo j . Ne samo da nas zanima taj prelaz sa nivoa i na nivo j u razmaku od jedne godine nego nam je naročito interesantno i pitanje na kom će se nivou društveni proizvod naći (ili koje će stanje proces zauzeti) posle t godina. U traženju odgovora na ova pitanja važnu ulogu imaju sledeće verovatnoće:

- p_{ij} — verovatnoća da će društveni proizvod sa nivoa i preći na nivo j posle godinu dana, pri čemu može biti $i = j$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$);
- $v_i(t)$ — verovatnoća da će društveni proizvod biti na nivou i na kraju perioda od t godina, $t = 0, 1, 2, \dots, N$.

Kvadratna matrica

$$(1) \quad M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

sastavljena od verovatnoća p_{ij} se naziva *tranzitivnom matricom*. Ona opisuje proces kretanja društvenog proizvoda i ima osobinu:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Verovatnoće $v_i(t)$ moraju zadovoljiti uslov sličan uslovu (2), tj.

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n v_i(t) = 1, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Poseban značaj za dalju analizu ima početni nivo društvenog proizvoda. Uzeli smo da je to nivo iz 1968. godine. Ovaj nivo je poslednji u nizu nivoa društvenog proizvoda u prošlosti. Naime za ovu godinu, kojoj korespondira vrednost $t = 0$, nivo društvenog proizvoda i_0 je poznat, pa je

$$(4) \quad v_{i_0}(0) = 1.$$

Po načinu kako su definisane, verovatnoće p_{ij} su uslovne a $v_i(t)$ su složene verovatnoće. Na osnovu teoreme o uslovnoj i složenoj verovatnoći možemo napisati sledeću rekurzivnu relaciju:

$$(5) \quad v_j(t+1) = \sum_{i=1}^n v_i(t) p_{ij} \quad \begin{array}{l} t = 0, 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Jednakosti (5) mogu da se zapišu u matricnoj formi ako se definiše vektor $V(t)$ na sledeći način:

$$(6) \quad V(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)].$$

Rekurzivne relacije (5) zapisane u matricnoj formi izgledaju ovako:

$$(7) \quad V(t+1) = V(t) \cdot M, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N.$$

gde je M tranzitivna matrica (1).

Stavljajući u relaciju (7) redom vrednosti za t dobijamo:

$$\begin{aligned} V(1) &= V(0) M \\ V(2) &= V(1) M = V(0) M^2 \\ V(3) &= V(2) M = V(0) M^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

ili u opštem slučaju

$$(8) \quad V(t) = V(o) M^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots, N,$$

gde je $V(o) = (1, 0, 0, \dots, 0)$, jedinični vektor n dimenzionalnog prostora.

Vektor $V(t)$ iz relacije (8) daje raspored verovatnoća za razne nivoe društvenog proizvoda nakon perioda od t godina. Ovaj raspored se, kao što se vidi, dobija množenjem vektora $V(o)$, koji reprezentuje početno stanje procesa, sa tranzitivnom matricom M , prethodno stepenovanom brojem t .

5. Odredimo sada, za svaki od n nivoa društvenog proizvoda, jedan broj koji će ga reprezentovati. Najpogodnije je uzeti sredine posmatranih nivoa. Tako dobijamo niz brojeva:

$$(9) \quad s_1, s_2, \dots, s_n,$$

koji može biti shvaćen i kao vektor S sa istim komponentama. Budući da smo već odredili raspored verovatnoća po nivoima za svako t , sada je moguće izračunati odgovarajuće očekivane vrednosti pomoću poznate relacije

$$(10) \quad E_t = \sum_{i=1}^n s_i v_i(t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N,$$

ili u obliku skalarnog proizvoda vektora S i $V(t)$:

$$(11) \quad E_t = [S, V(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Kako je za $t = 0$ $v_{i_0}(0) = 1$, gde je i_0 označava poznati nivo društvenog proizvoda u poslednjoj godini za koju imamo podatke (u našem slučaju je to 1968), to su ostale verovatnoće $v_i(0)$, (za $i \neq i_0$) jednake nuli. Otuda je

$$(12) \quad E_0 = s_{i_0}$$

Ostale vrednosti za E_t se izračunavaju po formuli (10) ili (11) varirajući t od 1 do N .

Vektor:

$$(13) \quad E = [E_0, E_1, E_2, \dots, E_N].$$

opisuje buduće kretanje društvenog proizvoda iz godine u godinu.

Granice g i G , nivoi društvenog proizvoda i očekivane vrednosti su prikazane na slici 1.

2. RAZMAK POVERENJA ZA KRETANJE DRUŠTVENOG PROIZVODA JUGOSLAVIJE

U analizi budućih kretanja društvenog proizvoda Jugoslavije do 1987. godine upotrebićemo metodologiju prezentiranu u prethodnom delu ovoga rada. Odmah treba naglasiti da ćemo prethodno posmatrati per capita društveni proizvod obračunat u US dolarima po stalnim cenama iz 1968. godine. Ovaj izbor činimo zato da bi smo iskoristili dosta dobre informacije o per capita dohotku u razvijenim zemljama sveta za dobijanje verovatnoća p_{ij} .

Kako smo već ranije naglasili, potrebno je prvo odrediti razmak poverenja R u kome će se sigurno u budućnosti kretati per capita društveni proizvod Jugoslavije. Na osnovu kretanja društvenog proizvoda u proteklim godinama (recimo od 1947. do 1968. godine) ima osnova pretpostaviti da on neće pasti ispod nivoa od onoga u 1968. godini. Time je automatski određena donja granica g . Koja je to granica? Prema podacima Saveznog zavoda za statistiku, per capita društveni proizvod Jugoslavije obračunat po cenama iz 1968. godine iznosio je 5.565,6 dinara. Prema proračunima Steve Stajića¹⁾ realni paritet dolar — dinar u 1968. godini je iznosio 1:7,93, a per capita društveni proizvod Jugoslavije u američkim dolarima, obračunat na osnovu toga pariteta, iznosio je 702 US \$. Mi ćemo u daljim razmatranjima uzeti ovu veličinu kao jednu od polaznih pretpostavki. Pri tome treba imati u vidu da postoje i drugačije ocene pariteta dolar — dinar. Posebnu pažnju zaslužuje procena pariteta sa odnosom 1:7,78, koju je objavio Vinski²⁾. Međutim, mi smo se odlučili za procenu Steve Stajića zbog toga što ona daje nešto nižu granicu g za društveni proizvod. To nam daje mogućnost da definišemo jedan pouzdaniji razmak poverenja R , koji obuhvata i procene Vinskog. Ove procene daju nešto uži razmak poverenja, što bi moglo da ima uticaja na opštu sliku o kretanju društvenog proizvoda u budućnosti. Bilo bi svakako interesantno da se izvrše proračuni i eksperimenti sa razmakom Vinskoga i eventualno sa drugim razmacima, kako bi se ustanovio uticaj širine razmaka na sliku o budućem kretanju društvenog proizvoda. Ovoga puta polazimo sa pretpostavkom da društveni proizvod po stanovniku u Jugoslaviji neće u narednim godinama nikada pasti ispod nivoa od 690 US \$.

Naredni korak je da se odredi gornja granica G razmaka R . U određivanju te granice ima znatno više teškoća nego u određivanju granice g . Ovde postoji mnogo veća nesigurnost zbog toga što na granicu G utiču mnogobrojni faktori. Da bi se oni sagledali, potrebno je pre svega istražiti uticaj tehničkog progressa i uticaj promena u kvalifikacionoj strukturi radne snage na rast društvenog proizvoda. U takva seriozna istraživanja se ovde nismo mogli upuštati. Međutim, o granici G je moguće učiniti određene pretpostavke, manje ili više realne. U našim daljim istraživanjima ćemo poći od pretpostavke da društveni pro-

¹⁾ Videti neobjavlenu studiju S. Stajića: »Komparativna kupovna moć dinara«, Institut ekonomskih nauka, Beograd, 1970. godine.

²⁾ Ivo Vinski: Društveni proizvod Jugoslavije i zemalja Zapada 1968—1985., Ekonomski institut Zagreb, 1970. godine.

izvod po glavi stanovnika u Jugoslaviji ne može, u narednih 20 godina, da premaši nivo od 2740 US \$, koliko otprilike danas imaju Kanada i Švedska. Važno je napomenuti da, ako posebna istraživanja pokažu da ta granica treba da bude drugačija, neće biti teško izvršiti ponovna preračunavanja po našoj metodologiji i dobiti novu projekciju per capita društvenog proizvoda. Ovako uzeta gornja granica društvenog proizvoda anticipira porast po prosečnoj stopi od preko 6% godišnje u pomenutom periodu, što predstavlja sasvim prihvatljivu varijantu društvenog cilja u pogledu maksimalnih i realnih mogućnosti ekonomskog razvoja. Napomenimo i to da je ta stopa nešto veća nego što je predviđena u napred navedenom radu Vinskog (vidi rad naveden u fusnoti 2, strana 18, tabela 7).

Prema tome, razmak poverenja R za per capita društveni proizvod Jugoslavije, sa kojim ulazimo u dalja razmatranja, je nešto širi nego što ga predviđa Vinski i iznosi:

$$(14) \quad R = [g, G] = [690, \quad 2740].$$

3. NIVOI PER CAPITA DRUŠTVENOG PROIZVODA JUGOSLAVIJE

Sada treba izvršiti podelu razmaka poverenja R iz (14) na nivoe per capita društvenog proizvoda Jugoslavije. Ta podela se može izvršiti na različite načine zavisno od toga čemu ona treba da posluži. Pre nego što predložimo jednu podelu razmaka R sa kojom ćemo se poslužiti, učinice dve važne napomene.

1. Dugoročna projekcija per capita društvenog proizvoda Jugoslavije ima karakter predviđanja. Što je duži period predviđanja to je sigurnost u predviđanjima manja. Ovde bi se mogla uspostaviti analogija između našeg zadatka predviđanja i zadatka koji ima jedan strelac koji puškom treba da pogodi metu. Što je meta dalja rasturanje njegovih pogodaka je veće oko centra. Ako je meta bliža (i naravno strelac dobar) pogoci će se grupisati u užim krugovima oko centra. Ma kako mi izvršili podelu razmaka R na podrazmake, koje ćemo zvati nivoima, činjenica je da će per capita društveni proizvod morati da se nađe na jednom od njih u svakoj od narednih godina (setimo se da razmak R ima verovatnoću jednaku jedinici). Za bližu budućnost naši nivoi mogu imati manji raspon (isto kao što meta našeg strelca može imati uže krugove ako mu je bliža), a da pri tome sigurnost pogodaka ne bude bitno smanjena. Što dalje idemo u budućnost, raspon nivoa treba da se širi, jer sigurnost predviđanja opada. Ovi razlozi diktiraju podelu razmaka R na nejednake podrazmake ili nivoe.

2. Podela razmaka R na nivoe društvenog proizvoda po stanovniku treba da omogući proračun ili procenu verovatnoća p_{ij} o kojima je bilo reči u odeljku 1. Kao što će se videti, mi ćemo se u proceni tih verovatnoća poslužiti informacijama o kretanju per capita društvenog proizvoda u zemljama razvijenijim od Jugoslavije. Podela razmaka R treba da odgovara varijacijama društvenog proizvoda u drugim zemljama inače se iz tih varijacija ne bi mogla dobiti predstava o verovatnoćama p_{ij} iz matrice (1).

Polazeći od prethodnih zahteva, mi smo izvršili podelu razmaka *R* na 65 podrazmaka i to:

- a) prvih 20 podrazmaka imaju širinu od po 20 US \$,
- b) drugih 20 podrazmaka imaju širinu od po 30 US \$,
- c) trećih 20 podrazmaka imaju širinu od po 40 US \$,
- d) poslednjih pet podrazmaka imaju širinu od po 50 US \$. Tako smo razmak poverenja *R* podelili na sledeće podrazmake (nivo):

Tabela 1.

Nivoi per capita društvenog proizvoda Jugoslavije

| Red. br. nivoa | Razmak US \$ | Sredina razmaka US \$ | Red. br nivoa | Razmak US \$ | Sredina razmaka US \$ |
|----------------|--------------|-----------------------|---------------|--------------|-----------------------|
| 1. | 690—710 | 700 | 34. | 1480—1510 | 1495 |
| 2. | 710—730 | 720 | 35. | 1510—1540 | 1525 |
| 3. | 730—750 | 740 | 36. | 1540—1570 | 1555 |
| 4. | 750—770 | 760 | 37. | 1570—1600 | 1585 |
| 5. | 770—790 | 780 | 38. | 1600—1630 | 1615 |
| 6. | 790—810 | 800 | 39. | 1630—1660 | 1645 |
| 7. | 810—830 | 820 | 40. | 1660—1690 | 1675 |
| 8. | 830—850 | 840 | 41. | 1690—1730 | 1710 |
| 9. | 850—970 | 860 | 42. | 1730—1770 | 1750 |
| 10. | 870—890 | 880 | 43. | 1770—1810 | 1790 |
| 11. | 890—910 | 900 | 44. | 1810—1850 | 1830 |
| 12. | 910—930 | 920 | 45. | 1850—1890 | 1870 |
| 13. | 930—950 | 940 | 46. | 1890—1930 | 1910 |
| 14. | 950—970 | 960 | 47. | 1930—1970 | 1950 |
| 15. | 970—990 | 980 | 48. | 1970—2010 | 1990 |
| 16. | 990—1010 | 1000 | 49. | 2010—2050 | 2030 |
| 17. | 1010—1030 | 1020 | 50. | 2050—2090 | 2070 |
| 18. | 1030—1050 | 1040 | 51. | 2090—2130 | 2110 |
| 19. | 1050—1070 | 1060 | 52. | 2130—2170 | 2150 |
| 20. | 1070—1090 | 1080 | 53. | 2170—2210 | 2190 |
| 21. | 1090—1120 | 1105 | 54. | 2210—2250 | 2230 |
| 22. | 1120—1150 | 1135 | 55. | 2250—2290 | 2270 |
| 23. | 1150—1180 | 1165 | 56. | 2290—2330 | 2310 |
| 24. | 1180—1210 | 1195 | 57. | 2330—2370 | 2350 |
| 25. | 1210—1240 | 1225 | 58. | 2370—2410 | 2390 |
| 26. | 1240—1270 | 1255 | 59. | 2410—2450 | 2430 |
| 27. | 1270—1300 | 1285 | 60. | 2450—2490 | 2470 |
| 28. | 1300—1330 | 1315 | 61. | 2490—2540 | 2515 |
| 29. | 1330—1360 | 1345 | 62. | 2540—2590 | 2565 |
| 30. | 1360—1390 | 1375 | 63. | 2590—2640 | 2615 |
| 31. | 1390—1420 | 1405 | 64. | 2640—2690 | 2665 |
| 32. | 1420—1450 | 1435 | 65. | 2690—2740 | 2715 |
| 33. | 1450—1480 | 1465 | | | |

U tabeli 1. smo pored nivoa u koloni »Razmak US \$« iskazali i sredine tih razmaka koje će nam omogućiti formiranje vektora S potrebnog za proračune očekivanih vrednosti per capita društvenog proizvoda Jugoslavije po formuli (11).

4. TRANZITIVNA MATRICA

Došli smo do najdelikatnijeg zadatka u predviđanju per capita društvenog proizvoda Jugoslavije. Treba formirati matricu verovatnoća p_{ij} . Kako je već rečeno, p_{ij} označava verovatnoću da će društveni proizvod po stanovniku preći sa nivoa i na nivo j u razmaku od jedne godine. Valja odmah napomenuti da smo kao osnovu za određivanje ovih verovatnoća uglavnom koristili informacije o dosadašnjem kretanju per capita društvenog proizvoda u razvijenijim zemljama. Nismo bili u mogućnosti da to učinimo na neki drugi način, ukoliko takav uopšte i postoji. Valja imati u vidu da pouzdanost predviđanja po metodologiji koju smo predložili u odeljku 1 u velikoj meri zavisi od tačnosti sa kojom su procenjeni elementi tranzitivne matrice. Zato ako treba izraziti neku rezervu u pogledu krajnjih rezultata, onda se ona prvenstveno može odnositi na verovatnoće p_{ij} . Ukoliko postoji mogućnost da se verovatnoće odrede tačnije nego što smo to mi učinili, neće biti teško napraviti nov proračun.

Postupak za određivanje verovatnoća p_{ij} je sledeći:

1. Na bazi podataka Ujedinjenih nacija sačinili smo vremenske serije kretanja per capita dohotka (obračunatog po stalnim cenama iz 1968. godine u dolarima) za 30 zemalja. Nastojali smo da dužina vremenskih serija bude što veća. Za dobar deo posmatranih zemalja postoje podaci od 1947. godine. Izbor zemalja i vremenske serije njihovih dohoda ovde zbog obimnosti izostavljamo. Ova statistička građa se nalazi kod autora i može interesentima biti stavljena na uvid.

2. Kao što smo objasnili u odeljku 3, razmak poverenja R je podeljen na 65 nivoa. Kako smo, na primer, odredili verovatnoće p_{ij} , tj. verovatnoće prelaza sa prvog nivoa čiji je raspon od 690 do 710 dolara na druge nivoe u razmaku od jedne godine? Posmatrali smo razvoj per capita GDP-a u drugim zemljama i tražili one zemlje među izabranim koje su bilo kada bile na nivou 1. Sve ove zemlje smo registrirali u posebnoj listi (namenjenoj nivou 1) i naznačili godine u kojima su se te zemlje našle na nivou 1. Zatim smo, za svaku zemlju, gledali per capita GDP-a u narednim godinama da bismo ustanovili na kom nivou su se te zemlje našle nakon isteka jedne godine. Kod nekih zemalja GDP se našao na istom nivou, a kod drugih je prešao na više nivoe nakon isteka jedne godine. Sve te prelaze smo tačno evidentirali u tabeli 2. u kojoj je znakom + označen nivo na koji je per capita GDP u odgovarajućoj zemlji prešao sa nivoa 1 u razmaku od jedne godine. Ako je u nekoj zemlji GDP nekoliko puta bio na nivou 1 u periodu od 1947—1968. godine (vidi primer Irske iz tabele 2) onda smo svaki takav slučaj registrirali na taj način što smo pored naziva zemlje stavili i godine u kojima se to dogodilo. Tako dobijamo sledeće važne informacije:

a) Ukupan broj slučajeva da su se posmatrane zemlje našle na prvom nivou per capita društvenog proizvoda. (Na primer: Finska 1955. i 1956, Porto Rico 1958, SSSR 1953, Mađarska 1957, Italija 1953. i 1954, Irska 1955, 1956. i 1958, Venecuela 1954, Kipar 1959. — Dakle ukupan broj slučajeva je 12.) Označimo ovaj broj sa A_1 .

b) U tabeli 2 je znakom + naznačen i nivo na koji je per capita društveni proizvod prešao naredne godine. Otuda je moguće dobiti broj prelazaka sa nivoa 1 na nivo j , $j = 1, 2, \dots, 65$, prostim prebrojavanjem znakova + u svakom stubu tabele 2. (Na primer: sa nivoa 1 na nivo 2 prešle su sledeće zemlje: Finska 1957, Irska 1957. i Venecuela 1955. Dakle, imamo ukupno tri prelaska sa nivoa 1 na nivo 2). Označimo sa B_{1j} broj prelazaka per capita društvenog proizvoda sa nivoa 1 na nivo j , $j = 1, 2, \dots, 65$. (Za primer naveden gore je $B_{12} = 3$).

Verovatnoće p_{ij} ćemo izračunavati po formuli

$$(15) \quad p_{1j} = \frac{B_{1j}}{A_1}, \quad j = 1, 2, \dots, 65$$

Na primer, iz tabele 2 dobijamo: $p_{11} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $p_{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,
 $p_{13} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $p_{14} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Tabela 2.

**Godišnje promene nivoa p/c društvenog proizvoda
u zemljama koje su bile na nivou 1 (690—710)**

| Zemlje i godine starta sa nivoa 1 | Prelazak na nivo | | | | | |
|--------------------------------------|------------------|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1. Finska 1955, 1956. | + | + | | | | |
| 2. Porto Rico 1958. | | | | | + | |
| 3. SSSR 1953. | | | | | + | |
| 4. Mađarska 1957. | | | | + | | |
| 5. Italija 1953, 1954. | + | | | + | | |
| 6. Irska 1955, 1956, 1958. | + | + | + | | | |
| 7. Venecuela 1954. | | + | | | | |
| 8. Kipar 1959. | + | | | | | |

$$B_{1j} \quad A_1 = 12 \quad \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Ostale verovatnoće su jednake nuli, jer je $B_{ij} = 0$, za $j = 5, 6, \dots, 65$. Drugim rečima, nema ni jedne zemlje u svetu koja je bilo kada (u periodu od 1947. do 1968) ostvarila prelaz per capita društvenog proizvoda sa nivoa 1 na nivo 5 ili veći u razmaku od jedne godine.

Način dobijanja veličina A_i i B_{ij} potrebnih za obrazac (15) izložen je tabelom 2. koja se odnosi samo na prvi nivo društvenog proizvoda. Brojeve p_{ij} raspoređujemo u prvi red tranzitivne matrice (1).

Sada čitav postupak ponavljamo za zemlje koje su se našle (bilo kada) na nivou 2, nivou 3 i tako dalje i najzad na nivou 65, s tim što brojeve $p_{2j}, p_{3j}, \dots, p_{65j}$ stavljamo u drugi, treći i tako dalje, 65-ti red matrice (1) koja pri podeli razmaka poverenja R izloženog u tabeli 1. ima format 65×65 .

Za svaki red matrice smo sačinili tabele slične tabeli 2, ali ih ovde ne iskazujemo zbog njihove obimnosti. Iz istih razloga izostavljamo i matricu. Ovaj materijal se nalazi kod autora i može po potrebi biti stavljen na uvid stručnoj javnosti.

5. PROJEKCIJA PER CAPITA DRUŠTVENOG PROIZVODA JUGOSLAVIJE DO 1987. GOD.

Proračun vektora $V(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots, 19$ po formuli (8) izvršen je na elektronskoj računskoj mašini u Institutu ekonomskih nauka u Beogradu. Ovde ćemo samo prezentirati rezultate proračuna očekivanih vrednosti per capita društvenog proizvoda izvedenih po formuli (11), sa napomenom da je za 1968. godinu iskazana realna veličina tog dohotka.

Tabela 3.

Očekivane vrednosti per capita društvenog proizvoda Jugoslavije do 1987. godine

| Red. broj = t | Godina | p/c društveni proizvod (US \$) |
|--------------------|--------|-------------------------------------|
| 0. | 1968. | 702 |
| 1. | 1969. | 727 |
| 2. | 1970. | 764 |
| 3. | 1971. | 809 |
| 4. | 1972. | 864 |
| 5. | 1973. | 927 |
| 6. | 1974. | 996 |
| 7. | 1975. | 1.070 |
| 8. | 1976. | 1.147 |
| 9. | 1977. | 1.224 |
| 10. | 1978. | 1.301 |

| Red. broj = t | Godina | p/c društveni proizvod (US \$) |
|--------------------|--------|-----------------------------------|
| 11. | 1979. | 1.380 |
| 12. | 1980. | 1.461 |
| 13. | 1981. | 1.545 |
| 14. | 1982. | 1.630 |
| 15. | 1983. | 1.717 |
| 16. | 1984. | 1.807 |
| 17. | 1985. | 1.898 |
| 18. | 1986. | 1.990 |
| 19. | 1987. | 2.083 |

Interesantno je napomenuti da se iz ovih proračuna može dobiti srednja stopa rasta per capita društvenog proizvoda u periodu do 1986. Ta stopa za Jugoslaviju iznosi 5,95% godišnje, dakle, skoro ista kao i stopa koju Vinski daje u pomenutom radu.

* * *

Najzad valja istaći da je ovo prvi pokušaj da se problematici kretanja društvenog proizvoda Jugoslavije priđe sa stanovišta teorije Markovskih procesa. Smatramo da bi istraživanja u ovom pravcu trebalo nastaviti sa ciljem da se ustanovi koji tip stohastičkog procesa bi najbolje odgovarao za primenu u predviđanju. Mi smo ovde pretpostavili da je kretanje društvenog proizvoda Jugoslavije jedan stacionaran Markovski proces. No, možda bi neki drugi tip Markovskog procesa ili nekog drugog stohastičkog procesa bolje odgovarao. Osim toga, problemu određivanja elemenata tranzitivne matrice treba pokloniti veću pažnju i uložiti znatno veće istraživačke napore u cilju njihovog preciznijeg određivanja.

(Rad primljen juna 1971.)

LITERATURA

1. R. A. Howard, *Dynamic Programming and Markov Processes*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
2. Ivo Vinski, *Društveni proizvod Jugoslavije i zemalja Zapada 1968—1985.*, Ekonomski institut, Zagreb, 1970.
3. S. Stajić, *Komparativna kupovna moć dinara*, Institut ekonomskih nauka, Beograd, 1970.

APPLICATION OF TRANSITION MATRICES IN FORECASTING
GNP GROWTH IN YUGOSLAVIA

by Milan ŽIVKOVIC

Summary

A method is presented for forecasting the growth of per capita GNP in Yugoslavia in the period 1968—1987. The main characteristic of the method adopted is the application of transition matrices. The first step in the analysis is the assumption that changes of the gross national product (GNP) construct a stationary stochastic process of the Markov type. The states of the process are defined by different levels of per capita GNP. The probabilities of the transition of the process from state »i« to state »j« (i. e. from the level »i« to the level »j«) in a period of a year, which constitute the elements of transition matrix (1), have been obtained on the basis of information on per capita GNP changes in countries more developed than Yugoslavia.

Before determining the elements of the transition matrix we defined the confidence interval in which the per capita GNP of Yugoslavia will move in the future. The lower bound of the interval was obtained by assuming that the Yugoslav GNP in any year of the period considered will not fall below the level of 1968 when, according to special estimates, it amounted to US \$ 700. The upper bound of the confidence interval was determined under the assumption that the per capita GNP of Yugoslavia in the observed period cannot surpass the level of US \$ 2740, the approximate presentday level of income in Canada and Sweden.

The confidence interval was then divided into 65 levels (or possible states of the process) and each level was represented by its arithmetic mean. All the levels and their representative points are given in Table 1.

Formula (8) gives the probability distribution of the transition of per capita GNP to various levels at the end of a period of »t« years ($t = 0, 1, \dots, 19$) and formula (11) gives the vector of expected values which describes the future changes of GNP, presented in Table 3.

Further research in this direction should be continued in order to investigate which type of the stochastic process best suits the objective of investigating future changes of GNP.